ThS. LÊ HỒNG ĐỨC (Chủ biên)
CÙNG TẬP THỂ GIÁO VIÊN
TRƯỜNG QUỐC TẾ NEWTON - HÀ NỘI

PHƯƠNG PHÁP GIẢI ĐỀ THI ĐẠI HỌC

MÔN

TOÁN

THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI CỦA BỘ GD&ĐT

- CÁC PHƯƠNG PHÁP TỐI ƯU
- GIẢI CHI TIẾT DỄ HIỂU

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Ths. LÊ HỒNG ĐỨC *(Chủ biên)*
CÙNG TẬP THỂ GIÁO VIÊN
TRƯỜNG QUỐC TẾ NEWTON – HÀ NỘI

PHƯƠNG PHÁP GIẢI ĐỀ THI ĐẠI HỌC

MÔN

TOÁN

- GIẢI CHI TIẾT DỄ HIỂU THEO CẤU TRÚC CỦA BỘ GD – ĐT
- CÁC PHƯƠNG PHÁP TỐI ƯU

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc cuốn sách:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI ĐỀ THI ĐẠI HỌC MÔN TOÁN

do Nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Lê Hồng Đức biên soạn.

Mục tiêu của cuốn sách này là cung cấp cho các thầy, cô giáo một bộ bài giảng có chất lượng theo định hướng mới của Bộ GD & ĐT và cho các em học sinh Trung học phổ thông một bộ tài liệu học tập bổ ích khi tiếp cận các dạng toán trong các đề thi đại học kể từ năm 2009 trở về trước.

Cuốn sách được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tuân thủ đúng nguyên tắc để đảm bảo được tính đúng đắn trong cách trình bày mỗi bài toán.

Cuốn sách này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các thầy, cô giáo đến các em học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán vào các Trường Đại học.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Địa chỉ: Nhóm tác giả Cự Môn do Th.S Toán học Lê Hồng Đức phụ trách
Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0893046689
E-mail: lehongduc39@yahoo.com.

NHÓM CỰ MÔN – LÊ HỒNG ĐỨC

CẤU TRÚC CỦA MỘT ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG

Theo phương thức mới thì đề thi của Bộ GD & ĐT có cấu trúc:

1. Đề thi gồm 70% kiến thức thuộc lớp 12 và 30% kiến thức thuộc lớp 10 và lớp 11.
2. Mỗi đề thi thông thường có 10 câu, mỗi câu được 1 điểm và được phân phối như sau:

Các đề thi từ năm 2006 – 2008 có cấu trúc

Câu I. (2 điểm): Hàm số và các bài toán liên quan, cụ thể:

1. (1 điểm): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
2. (1 điểm): Bài toán liên quan tới hàm số.

Câu II. (2 điểm): Đại số và lượng giác

1. (1 điểm): Giải phương trình hoặc hệ lượng giác.
2. (1 điểm): Giải phương trình hoặc hệ đại số.

Câu III. (2 điểm): Phương pháp toạ độ trong không gian.

Câu IV. (2 điểm)

1. (1 điểm): Các bài toán liên quan đến nguyên hàm và tích phân.
2. (1 điểm): Các bài toán về bất đẳng thức, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Câu V. (2 điểm):

Theo chương trình THPT không phân ban

1. (1 điểm): Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng.
2. (1 điểm): Tổ hợp và xác suất.

Theo chương trình THPT phân ban

1. (1 điểm): Phương trình, bất phương trình, hệ mũ và lôgarit.
2. (1 điểm): Hình học không gian.

Các đề thi từ năm 2009 có cấu trúc

Câu I. (2 điểm): Hàm số và các bài toán liên quan, cụ thể:

1. (1 điểm): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
2. (1 điểm): Bài toán liên quan tới hàm số.

Câu II. (2 điểm): Đại số và lượng giác

1. (1 điểm): Giải phương trình hoặc hệ lượng giác.
2. (1 điểm): Giải phương trình hoặc hệ đại số.

Câu III. (1 điểm): Các bài toán liên quan đến nguyên hàm và tích phân.

Câu IV. (1 điểm): Hình học không gian (thuộc kiến thức lớp 12).

Câu V. (1 điểm): Các bài toán về bất đẳng thức, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Theo chương trình THPT chuẩn

Câu VI. (2 điểm)

1. (1 điểm): Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng.
2. (1 điểm): Phương pháp toạ độ trong không gian.

Câu VII. (1 điểm): Số phức.

Theo chương trình THPT nâng cao

Câu VI. (2 điểm)

1. (1 điểm): Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng.
2. (1 điểm): Phương pháp toạ độ trong không gian.

Câu VII. (1 điểm): Các bài toán chỉ có trong chương trình nâng cao.

Để thực hiện tốt bài thi của bản thân, các em học sinh có thể tham khảo kinh nghiệm sau:

1. Đọc đề thi thật kỹ, tối thiểu ba lần (dành từ 10 đến 25 phút):

Lần đọc thứ nhất: Đọc chậm từ trên xuống với mục đích gắng ghi nhớ toàn bộ nội dung của đề thi.

Lần đọc thứ hai: Đọc chậm từ trên xuống, và:

a. Khi gặp *bài toán chắc chắn giải được*, hãy khẳng định nó thuộc dạng toán gì và các bước để thực hiện nó (ghi ra nháp). Thí dụ với câu "*Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số* $y = \frac{x^2 - 2}{x}$" các em học sinh sẽ nhận thấy ngay rằng nó thuộc dạng toán "*Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc hai trên bậc nhất*" và để có lời giải đúng cần thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Miền xác định $D = \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

Bước 2: Tính đạo hàm y', rồi kết luận về tính đơn điệu và cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số.

Bước 3: Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận xiên (bằng phép chia đa thức TS cho MS) của đồ thị.

Bước 4: Lập bảng biến thiên.

Bước 5: Vẽ đồ thị hàm số dựa trên bảng tổng kết (có thể cần lấy thêm điểm để đảm bảo tính chính xác cho đồ thị) và với dạng đồ thị này cần vẽ các tiệm cận trước.

b. Khi gặp *bài toán chưa chắc chắn giải được*, cho dù đã định hình được nó thuộc một dạng toán lớn nào đó thì hãy nhìn nhận lại đầu bài rồi thực hiện một vài phép thử ra nháp để đưa ra lời kết. Thí dụ với bài toán:

"Tìm các nghiệm thuộc $[0, 2\pi]$ *của phương trình*:

$$5(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}) = \cos 2x + 3",$$

các em học sinh sẽ nhận thấy ngay rằng cần thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Bước 2: Lựa chọn phép biến đổi lượng giác phù hợp để chuyển phương trình ban đầu về dạng phương trình lượng giác cơ bản, từ đó nhận được nghiệm cho phương trình theo $k \in \mathbf{Z}$.

Bước 3: Thiết lập điều kiện cho nghiệm $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow$ giá trị $k \Rightarrow$ nghiệm.

Tuy nhiên, việc thực hiện bước 2 là không chắc chắn, do đó cần một vài phép biến đổi ra nháp theo ba định hướng sau:

- Chuyển đổi phân số, với nhận xét:

$$\begin{aligned}\cos 3x + \sin 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x \\ &= 4(\cos^3 x - \sin^3 x) - 3(\cos x - \sin x) \\ &= (\cos x - \sin x)[4(1 + \cos x.\sin x) - 3] \\ &= (\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x)\end{aligned}$$

$$\frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} = \cos x - \sin x$$

Khi đó, phương trình được chuyển về dạng:

$$5(\sin x + \cos x - \sin x) = \cos 2x + 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0.$$

Tới đây, các em học sinh dừng lại vì đã chắn chắc thực hiện được tiếp.

- Thực hiện phép quy đồng cục bộ, cụ thể:

$$\begin{aligned}\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} &= \frac{\sin x - (\cos 3x - \cos x) + \cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} \\ &= \frac{\sin x + \cos x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} \\ &= \frac{2\sin 2x.\cos x + \cos x}{1 + 2\sin 2x} = \cos x.\end{aligned}$$

Khi đó, phương trình được chuyển về dạng:

$$5\cos x = \cos 2x + 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

Tới đây, các em học sinh dừng lại vì đã chắn chắc thực hiện được tiếp.

- Thực hiện phép quy đồng toàn bộ để khử mẫu.

c. Khi gặp *bài toán chưa định hướng được cách giải*, thì hãy bỏ qua sau khi đã thuộc được nội dung của nó.

Lần đọc thứ ba: Đọc chậm từ trên xuống, và kiểm tra lại tính đúng đắn cho những bài toán đã chắc chắn giải được, công việc này sẽ giúp các em học sinh loại bỏ được những suy nghĩ chủ quan hoặc thiếu sót không đáng có. Với bài toán chưa định hướng được cách giải trong lần đọc thứ hai, rất có thể tới lần đọc này các em sẽ phát hiện ra được ý tưởng để thực hiện nó, nếu được như vậy thì hãy ghi ngay ra nháp, còn không lại tiếp tục bỏ qua.

2. Ghi lời giải chi tiết các bài toán đã chắc chắn giải được vào giấy thi. Trong thời gian này các em học sinh cần tập trung cao độ và dừng băn khoăn về những bài toán chưa giải được. Tuy nhiên, do đã ghi nhận được nội dung của các bài toán chưa giải được vào não bộ và phương thức hoạt động đa nhiệm của nó nên hoàn toàn có thể xảy ra trường hợp các em chợt nhận thấy rằng bài toán đó thuộc một dạng đã gặp hoặc có được một phương pháp để tháo gỡ vướng mắc sau lần đọc thứ ba, nếu như vậy hãy ghi nhận tất cả ra nháp rồi tiếp tục quay lại với bài thi.
3. Sau khi đảm bảo được tính đúng đắn cho lời giải trong giấy thi thì mới quay lại nháp cho những bài toán chưa giải được.
4. Cần loại bỏ suy nghĩ phải giải được đến cùng mới ghi vào bài thi, bởi cho dù mỗi câu hỏi được 1 điểm nhưng vì nó được chấm theo thang điểm 0.25, tức là làm đúng đến đâu các em sẽ nhận được điểm đến đó, do vậy hãy cứ ghi nhận chúng vào bài làm của mình.

Thí dụ với câu:

"Xác định m *để hàm số* $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ *có các điểm cực đại, cực tiểu lập thành một tam giác đều"*,

khi nhận thấy nó thuộc dạng toán *"Thuộc tính của các điểm cực trị"* và sẽ phải thực hiện theo các bước:

Bước 1: Miền xác định D = **R**.

Bước 2: (*Tìm điều kiện để hàm số có ba cực trị*) Tính đạo hàm y', thiết lập phương trình y' = 0. (1)

Để hàm số có ba cực trị điều kiện là phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt.

Bước 3: (*Tìm điều kiện để ba cực trị lập thành một tam giác đều*) Giả sử chưa biết cách làm.

Các em cũng ghi nhận lời giải của bước 1, bước 2 vào bài thi, cụ thể:

Miền xác định D = **R**.

Đạo hàm:

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m),\ y' = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - m) = 0 \qquad (1)$$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Sau đó để cách vài dòng rồi tiếp tục với bài toán khác.

5. Trong đề thi rất có thể các em sẽ gặp phải một vài dạng toán chưa được tiếp cận bao giờ, trong trường hợp này dừng vội kết luận mình không giải được mà hãy nghĩ tới phương pháp phân tích để chia nhỏ bài toán thành những bài toán con (bài toán 0.25 điểm) và trong số chúng rất có thể các em biết cách giải quyết. Đó chính là bí quyết để nhận được điểm tối đa từ một bài toán lớn không giải được.

   Thí dụ với câu:

   "*Tính tích phân* $I = \int_{-1}^{1} \frac{1+\sin x}{x^2+1} dx$ ",

   rất nhiều học sinh sẽ thấy lúng túng bởi:

   - Nó không thuộc dạng nguyên hàm cơ bản.
   - Không thể sử dụng phương pháp đổi biến.
   - Không thể sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

   Và việc vận dụng phương pháp phân tích vào đây sẽ giúp các em có được một phần điểm hoặc nhận được điểm tối đa vì đã tìm ra được lời giải hoàn chỉnh của nó. Cụ thể:

   - Chia nhỏ I thành hai tích phân I_1 và I_2 như sau:

   $$I = \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1}}_{I_1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{\sin x.dx}{x^2+1}}_{I_2}.$$

   - Tới đây hầu hết các em đều có thể tính được I_1 bằng phép đổi biến $x = \tan t$ (đã được học trong sgk), như vậy sẽ nhận được 0.5 điểm.
   - Với tích phân I_2 nó thuộc dạng cơ bản "*Tính tích phân* $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ *với* $f(x)$ *là hàm số lẻ*" ta sử dụng phép đổi biến $x = -t$.

6. Cuối cùng, các em học sinh cần biết rằng do không nhất thiết phải thực hiện đề thi theo thứ tự nên bài toán nào chắc chắn giải được các em nên thực hiện trước.

Xin chúc các em thành công!

LÊ HỒNG ĐỨC

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2009

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7.0 điểm)

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số: $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$. (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đó cắt hai trục Ox, Oy tại A, B và ΔOAB cân tại O.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình:
$$\frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3}.$$
2. Giải phương trình: $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$, $(x \in \mathbb{R})$.

Câu III: (1 điểm): Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} (\cos^3 x - 1)\cos^2 x\,dx$.

Câu IV: (1 điểm): Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D, AB = AD = 2a, CD = a, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Câu V: (1 điểm): Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thoả mãn $x(x + y + z) = 3yz$, ta có:
$$(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \le 5(y + z)^3.$$

PHẦN RIÊNG (3.0 điểm):

Thí sinh được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI. a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm I(6; 2) là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm M(1; 5) thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng (Δ): $x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB.
2. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình:
(P): $2x - 2y - z - 4 = 0$, (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$.
Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định toạ độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

Câu VII.a (1 điểm): Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI. b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) và đường thẳng (Δ) có phương trình:

   (C): $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$,

   (Δ): $x + my - 2m + 3 = 0$, với m là tham số thực.

   Gọi I là tâm đường tròn (C). Tìm m để (Δ) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích ΔIAB lớn nhất.

2. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) có phương trình:

   (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$,

   $$(\Delta_1): \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}, \quad (\Delta_2): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}.$$

   Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng (Δ_1) sao cho khoảng cách từ M tới đường thẳng (Δ_2) và khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P) bằng nhau.

Câu VII.b (1 điểm): Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases}$.

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Với hàm số:

   $$(H): y = \frac{ax + b}{cx + d}, \text{ với } c \neq 0, D = ad - bc \neq 0$$

ta lần lượt có:

a. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

b. Sự biến thiên của hàm số:

- Giới hạn của hàm số tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

  $\lim\limits_{x \to \infty} y = \frac{a}{c}$ nên $y = \frac{a}{c}$ là đường tiệm cận ngang.

  $\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}} y = \infty$ nên $x = -\frac{d}{c}$ là đường tiệm cận đứng.

- Bảng biến thiên:

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}.$$

- Nếu $D = ad - bc > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D.
- Nếu $D = ad - bc < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên D.

Lập bảng biến thiên:

Trường hợp D > 0

x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$\frac{a}{c}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{a}{c}$

Vậy, hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

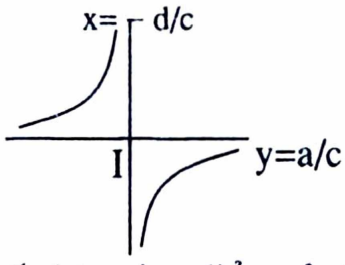
Trường hợp D < 0

x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	$\frac{a}{c}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{a}{c}$

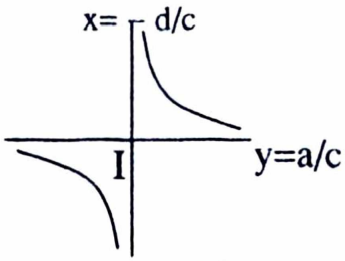
Vậy, hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

c. Đồ thị: Xác định toạ độ giao điểm của đồ thị với hai trục toạ độ.
Do có hai trường hợp khác nhau về chiều biến thiên nên đồ thị của hàm số có hai dạng sau đây:

Với D > 0



Với D < 0



Đồ thị hàm số nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ BẬC NHẤT TRÊN BẬC NHẤT

Tính chất 1: Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Hướng dẫn chứng minh:

Bước 1: Thật vậy, điểm $I(x_0, y_0)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận, ta dời trục bằng tịnh tiến về gốc I. Công thức dời trục là:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}.$$

Thay x, y vào hàm số ta được:

$$Y + y_0 = \frac{a(X + x_0) + b}{c(X + x_0) + d} \Leftrightarrow Y = F(X).$$

Bước 2: Hàm số này là hàm lẻ nên đồ thị nhận I làm tâm đối xứng.

Tính chất 2: Không có bất cứ đường tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua tâm đối xứng I.

Hướng dẫn chứng minh:

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0) \in (H)$, khi đó $y_0 = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$(d):\ y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

Bước 2: Giả sử $I \in (d)$, khi đó:

$$\frac{a}{c} - y_0 = y'(x_0)\left(-\frac{d}{c} - x_0\right). \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra điều mâu thuẫn.

Bước 3: Vậy không có bất cứ đường tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua I.

Tính chất 3: M là điểm tuỳ ý thuộc đồ thị hàm số. Nếu tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B thì:

a. M là trung điểm AB;

b. ΔIAB có diện tích không đổi ;

c. Tích các khoảng cách từ M tới hai đường tiệm cận là một hằng số.

Hướng dẫn chứng minh:

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0) \in (H)$, khi đó:

$$y_0 = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$(d):\ y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

Bước 2: Xác định toạ độ của A, B theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng (d) với tiệm cận đứng (tcđ) $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang (tcn) $y = \frac{a}{c}$.

Bước 3: Ta có:

a. Nhận xét rằng $x_A + x_B = 2x_M \Leftrightarrow$ M là trung điểm AB.

b. $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA.IB = const.$

c. Gọi các khoảng cách:

$$d_1 = d(I, tcđ) = |x_0 + \frac{d}{c}|,\ d_2 = d(I, tcn) = |y_0 - \frac{a}{c}|.$$

Khi đó:

$$d_1.d_2 = const.$$

Tính chất 4: *Tam giác nội tiếp Hyperbol* (H)

a. Nếu ΔABC nội tiếp trong Hyperbol (H) (A, B, C không thẳng hàng thuộc đồ thị hàm số) thì trực tâm H của ΔABC cũng thuộc (H).

b. Nếu ΔABC vuông tại A nội tiếp trong (H) thì B, C thuộc hai nhánh của Hyperbol (H).

c. Nếu xét tập hợp các tam giác vuông có chung đỉnh góc vuông và cùng nội tiếp trong một đường Hyperbol (H) thì tất cả các cạnh huyền của chúng song song với nhau (hay cùng vuông góc với một tiếp tuyến).

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, ta xét Hyperbol (H) có phương trình

$$(H):\ y = \frac{1}{x}.$$

Với A, B, C∈(H), ta được:

$$A(x_1, \frac{1}{x_1}),\ B(x_2, \frac{1}{x_2}),\ C(x_3, \frac{1}{x_3}).$$

a. Giả sử $H(x_0, y_0)$ là trực tâm ΔABC, khi đó:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_0 - \frac{1}{x_1})(\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_2}) = 0 \\ (x_0 - x_2)(x_3 - x_1) + (y_0 - \frac{1}{x_2})(\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_1}) = 0 \end{cases} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{x_0}$$

$\Leftrightarrow H \in (H).$

b. ΔABC vuông tại A

$$\Leftrightarrow AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1})(\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_1}) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x_1^2.x_2.x_3} = 0$$

$\Leftrightarrow x_1^2.x_2.x_3 = -1 \Rightarrow x_2.x_3 < 0$

$\Leftrightarrow$ B, C thuộc hai nhánh của Hyperbol (H).

c. Ta có:

- ΔABC vuông tại A và các đỉnh A, B, C có hoành độ tương ứng là x_1, x_2, x_3, luôn có:

$$x_1^2.x_2.x_3 = -1$$

và đường thẳng (BC) có hệ số góc $k_{BC} = -\frac{1}{x_2x_3}$. (1)

- ΔAB_1C_1 vuông tại A và các đỉnh A, B_1, C_1 có hoành độ tương ứng là x_1, x'_2, x'_3, luôn có:

$$x_1^2.x'_2.x'_3 = -1$$

và đường thẳng (B_1C_1) có hệ số góc $k_{B'C'} = -\frac{1}{x_2x_3}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra:

$k_{BC} = k_{B'C'} \Leftrightarrow BC//B'C'$.

Tức là BC, B'C' cùng vuông góc với tiếp tuyến tại A của (H).

Tính chất 5: *Tiếp tuyến của Hyperbol* (H)

a. Hai tiếp tuyến của (H) không bao giờ vuông góc với nhau.

b. Hai tiếp tuyến song song của (H) có các tiếp điểm đối xứng nhau qua tâm của (H).

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, ta xét Hyperbol (H) có phương trình

$$(H):\ y = \frac{1}{x}.$$

Với $A(x_1, \frac{1}{x_1}) \in (H)$, ta được phương trình tiếp tuyến tại A có dạng:

$$(d_A):\ y = -\frac{1}{x_1^2}(x - x_1) + \frac{1}{x_1} \Rightarrow \text{hệ số góc của } (d_A) \text{ là } k_A = -\frac{1}{x_1^2}.$$

Với $B(x_2, \frac{1}{x_2}) \in (H)$, ta được phương trình tiếp tuyến tại B có dạng:

$$(d_B):\ y = -\frac{1}{x_2^2}(x - x_2) + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \text{hệ số góc của } (d_B) \text{ là } k_B = -\frac{1}{x_2^2}.$$

a. Ta có:

$$(d_A) \perp (d_B) \Leftrightarrow k_A.k_B = -1 \Leftrightarrow (-\frac{1}{x_1^2}).(-\frac{1}{x_2^2}) = -1 \Leftrightarrow x_1^2.x_2^2 = -1 \text{ (MT)}.$$

Vậy hai tiếp tuyến của (H) không bao giờ vuông góc với nhau.

b. Ta có:

$$(d_A)//(d_B) \Leftrightarrow k_A = k_B \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1^2} = -\frac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = -x_2.$$

Suy ra $A(x_1, \frac{1}{x_1})$ và $B(-x_1, -\frac{1}{x_1}) \Rightarrow$ A, B đối xứng qua tâm O của (H).

Tính chất 6: Hyperbol (H) và đường tròn. Nếu một đường tròn (C) cắt (H) tại bốn điểm sao cho hai điểm trong 4 điểm đó là các đầu mút đường kính của đường tròn, thì hai điểm còn lại đối xứng nhau qua tâm của (H) và ngược lại.

Hướng dẫn chứng minh:

Giả sử $(C) \cap (H) = \{A, B, C, D\}$ và AB là đường kính của (C), khi đó:

- ΔDAB vuông tại D $\Rightarrow$ tiếp tuyến tại D là (d_D) vuông góc với AB.
- ΔCAB vuông tại C $\Rightarrow$ tiếp tuyến tại C là (d_C) vuông góc với AB.

$\Rightarrow (d_D)//(d_C) \Rightarrow$ C, D đối xứng qua tâm O của (H).

☞ ***Chú ý***: Với phép dời trục bằng tịnh tiến về gốc I, theo công thức dời trục là:

$$\begin{cases} x = X - \frac{d}{c} \\ y = Y + \frac{a}{c} \end{cases},$$

ta đưa phương trình của Hyperbol (H): $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ về dạng: $Y = \frac{k}{X}$.

2. Chúng ta nhận thấy rằng:

ΔOAB vuông cân tại O $\Rightarrow$ Đường thẳng AB có hệ số góc bằng ± 1.

Khi đó, bài toán được chuyển về "*Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc của nó*".

Tới đây các em học sinh hãy tham khảo định hướng trong câu I.2 của đề toán khối B – 2006.

☞ ***Chú ý***: Nếu các em học sinh không đưa ra được đánh giá về hệ số góc của tiếp tuyến thoả mãn điều kiện đầu bài thì cần thực hiện bài toán theo định hướng trong câu I.2 của đề toán khối D – 2007.

Câu II.

1. Chúng ta có đánh giá rằng TS và MS không có nhân tử chung, do đó hướng đi duy nhất là nhân chéo hai vế để nhận được:

$$(1-2\sin x)\cos x = \sqrt{3}(1+2\sin x)(1-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - 2\sin x.\cos x = \sqrt{3}(1-2\sin^2 x + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}(\cos 2x + \sin x)$$

Tới đây, dễ dàng đánh giá được rằng cần chia hai cung x và 2x về hai vế để nhận được phương trình có dạng tổng quát:

$$a.\sin(kx) + b.\cos(kx) = c.\sin(lx) + d.\cos(lx), \text{ với } a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

và phương pháp giải nó tương tự cách 1 để giải phương trình $a.\sin x + b.\cos x = c$ – Tham khảo định hướng trong câu II.1 của đề toán khối D – 2007.

Như vậy, khi trình bày bài toán này các em học sinh cần thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình. (*)

Bước 2: Sử dụng biến đổi trên để giải phương trình.

Bước 3: Kết hợp với điều kiện (*) để đưa ra kết luận về nghiệm của phương trình.

2. Nhận xét rằng phương trình chứa cả căn bậc ba $\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)$ và căn bậc hai $\left(\sqrt{6-5x}\right)$ mà giữa chúng:

- Được liên kết với nhau bởi phép "+", nên việc sử dụng phép nâng lên luỹ thừa để khử căn cho phương trình là không khả thi.
- Không có mối liên hệ mũ với nhau, nên không thể sử dụng một ẩn phụ để chuyển phương trình về dạng đa thức.

Từ đó, phương pháp được đề xuất là sử dụng hai ẩn phụ:

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{3x-2} \\ v = \sqrt{6-5x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 3x-2 \\ v^2 = 6-5x \end{cases} \Rightarrow 5u^3 + 3v^2 = 8.$$

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ: $\begin{cases} 2u+3v-8=0 \\ 5u^3+3v^2=8 \end{cases}$

và để giải hệ trên chúng ta chỉ cần sử dụng phương pháp thế.

Câu III. Đây là tích phân chỉ chứa một hàm số lượng giác (hàm số cosx) và lại được cho dưới dạng tích, điều này cho phép chúng ta nghĩ tới việc tách I thành nhiều tích phân khác nhau, cụ thể:

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\cos^5 x - \cos^2 x\right)dx = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^5 x.dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2 x.dx}_{I_2}.$$

Tới đây, để tính được I_1 và I_2 các em học sinh chỉ cần sử dụng nhận xét cho các dạng tổng quát sau:

- Tích phân $\int_a^b \cos^{2n} x.dx \left(\text{hoặc } \int_a^b \sin^{2n} x.dx\right)$ được xác định bằng cách sử dụng công thức hạ bậc

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \left(\text{hoặc } \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right).$$

- Tích phân $\int_a^b \cos^{2n+1} x.dx$ $\left(\text{hoặc } \int_a^b \sin^{2n+1} x.dx \right)$ được xác định bằng cách:

$$\int_a^b \cos^{2n+1} x.dx = \int_a^b \cos^{2n} x.\cos x.dx$$

$$= \int_a^b \left(\cos^2 x\right)^n .\cos x.dx = \int_a^b \left(1-\sin^2 x\right)^n .\cos x.dx.$$

Khi đó, chỉ cần sử dụng ẩn phụ t = sinx.

Câu IV. Đây là bài toán về hình học không gian có yêu cầu nhiều về kiến thức ở lớp 11, cụ thể:

- Vì (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên:

$$SI \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI.S_{ABCD}.$$

- Góc giữa hai mặt phẳng, cụ thể là (SBC) và (ABCD). Khi đó, các em học sinh cần chỉ ra được một điểm thuận lợi K trên giao tuyến BC sao cho:

$$\begin{cases} (SBC) \supset Kx \perp BC \\ (ABCD) \supset Ky \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{xKy} = 60^0.$$

Điểm K chính là hình chiếu vuông góc của S (hoặc I) trên BC bởi định lý ba đường vuông góc.

Công việc còn lại của các em là sử dụng các hệ thức trong tam giác để tính SI và S_{ABCD}.

Câu V. Trước tiên, các em học sinh hãy nhìn vào bất đẳng thức cần chứng minh để khẳng định rằng nó được xây dựng dựa trên ba hạng tử là:

x + y, x + z và y + z.

Như vậy, để giảm độ phức tạp của bất đẳng thức cần chứng minh chúng ta nghĩ ngay tới việc sử dụng ba ẩn phụ:

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = x + z \\ c = y + z \end{cases} \qquad (*)$$

và khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a^3 + b^3 + 3abc \le 5c^3 \Leftrightarrow (a + b)(a^2 + b^2 - ab) + 3abc \le 5c^3. \quad (1)$$

Tới đây, chúng ta cần chuyển biểu thức điều kiện theo a, b, c, thì bằng việc giải hệ (*), chúng ta sẽ nhận được:

$$x = \frac{1}{2}(a + b - c),\ y = \frac{1}{2}(a - b + c),\ z = \frac{1}{2}(-a + b + c)$$

Khi đó, điều kiện x(x + y + z) = 3yz trở thành:

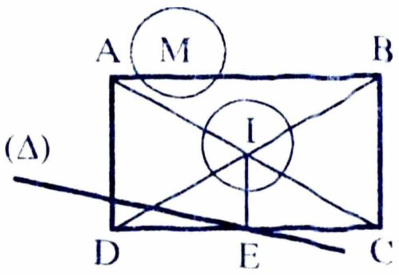
$$c^2 = a^2 + b^2 - ab. \quad (2)$$

Công việc còn lại chỉ là tận dụng triệt để (2) để chứng minh (1).

DẠY KÈM QUY ĐỂ CHINH PHỤC

Câu VI.a

1. Các em học sinh hãy phác thảo ra hình vẽ để thấy rằng với yêu cầu viết phương trình đường thẳng AB, chúng ta chỉ cần xác định phương của nó (tức đi tìm vtcp hoặc vtpt của AB) bởi AB luôn đi qua M (giả thiết).
   Ta lần lượt đánh giá như sau:
   - Để có được vtcp của AB, chúng ta cần biết được toạ độ của A hoặc B và hướng này không đúng bởi không tận dụng được giả thiết đã cho về I và E.
   - Để có được vtpt của AB, chúng ta chỉ cần biết toạ độ điểm E và vì E thuộc (Δ) nên chúng ta chỉ cần thêm một điều kiện nữa.



   Công việc này khá đơn giản khi tận dụng được tính đối xứng của tâm I để tìm được điểm N đối xứng với M qua I, từ đó:

$$N \in CD \Rightarrow NE \perp IE \Leftrightarrow \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{NE} = 0 \Rightarrow \text{toạ độ của E.}$$

   Như vậy, để thực hiện bài toán trên chúng ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Gọi N là điểm đối xứng với M qua I, suy ra toạ độ của N và nhận xét N thuộc đường thẳng CD.

   Bước 2: Ta lần lượt:
   - Vì E thuộc đường thẳng (Δ) nên có toạ độ thoả mãn phương trình đường thẳng (Δ). Từ đó, suy ra toạ độ của $\overrightarrow{IE}$ và $\overrightarrow{NE}$.
   - Vì E là trung điểm của CD nên:

$$IE \perp NE \Leftrightarrow \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{NE} = 0 \Rightarrow \text{toạ độ của E.}$$

   Bước 3: Phương trình đường thẳng AB được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IE} \end{cases}.$$

2. Đây thuộc dạng toán xét vị trí tương đối của mặt phẳng với mặt cầu, và ở đây:
   a. Để chứng minh rằng mặt phẳng (P) (có vtpt $\overrightarrow{n_p}$) cắt mặt cầu (S) (có tâm I bán kính R) theo một đường tròn, chúng ta đi khẳng định:
      $d(I, (P)) < R.$
   b. Để xác định toạ độ tâm H và bán kính r của đường tròn đó, ta lần lượt có:
      - Bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.
      - Tâm H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) nên để có được toạ độ của H chúng ta thực hiện theo các bước:

        Bước 1: Viết phương trình tham số (giả sử theo t) của đường thẳng (d) qua I và vuông góc với (P), tức:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua I} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_p} \end{cases}.$$

Bước 2: Thay phương trình của (d) vào (P), ta được:

$$f(t) = 0 \Rightarrow \text{Giá trị t} \Rightarrow \text{Toạ độ điểm H.}$$

Bước 3: Kết luận.

Câu VII.a. Với yêu cầu này chúng ta chỉ cần giải phương trình để tìm được nghiệm phức rồi sử dụng công thức tính môđun.

Câu VI.b.

1. Với các em học sinh chưa có kinh nghiệm sẽ thực hiện bài toán này theo thứ tự:
   - Tìm m để (Δ) cắt (C) (có tâm I, bán kính R) tại hai điểm phân biệt A và B, tức là thiết lập điều kiện:

     $$d(I, (\Delta)) < R.$$

   - Tìm m để diện tích ΔIAB lớn nhất.

   Trong thực tế, bài toán này được thực hiện theo các bước sau:

   Bước 1: Xác định tâm I và bán kính R của (C).

   Bước 2: Nhận xét rằng:

   $$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA.IB.\sin \widehat{AIB} \le \frac{1}{2} IA.IB$$

   từ đó, suy ra $\left(S_{\Delta IAB}\right)_{Max} = \frac{1}{2} IA.IB$, đạt được khi:

   $$\sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^0 \Leftrightarrow IA \perp IB \Leftrightarrow d(I,(\Delta)) = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

   $\Rightarrow$ Giá trị tham số.

   Bước 3: Kết luận.

   ☞ *Chú ý*: Trong lập luận trên vì có điều kiện $d(I,(\Delta)) = \frac{R}{\sqrt{2}} < R$ nên (C) luôn cắt (Δ).

2. Bài toán này thuộc dạng "*Tìm điểm thuộc đường thẳng* (d) *thoả mãn điều kiện* K", trước tiên các em học sinh hãy tham khảo định hướng trong câu III.1 của đề toán khối B – 2006. Sau đó, cần nhớ được các công thức tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng và công thức tính khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

Câu VII.b. Để giải hệ phương trình đã cho chúng ta chỉ cần thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho hệ. (*)

Bước 2: Sử dụng các phép biến đổi tương đương của hàm mũ và lôgarit chúng ta sẽ biến đổi được hệ về dạng đơn giản.

Bước 3: Kết hợp với (*) để kết luận nghiệm đúng của hệ.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2009

Câu I.

1. Ta lần lượt có:

a. ***Hàm số xác định*** trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

b. ***Sự biến thiên của hàm số***:

- Giới hạn của hàm số tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to\infty} y = \frac{1}{2}$ nên $y = \frac{1}{2}$ là đường tiệm cận ngang.

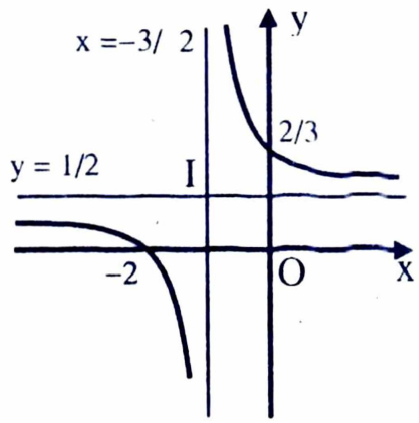
$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} y = -\infty$ nên $x = -\frac{3}{2}$ là đường tiệm cận đứng.

- Bảng biến thiên:

$$y' = -\frac{1}{(2x+3)^2} < 0 \text{ với mọi } x \in D$$

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên D.

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$3/2$	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$3/2$



c. ***Đồ thị của hàm số***: Đồ thị hàm số nhận điểm $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng.

Lấy thêm các điểm $A\left(0; \frac{2}{3}\right)$ và B(−2; 0).

2. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Nhận thấy rằng:

ΔOAB vuông cân tại O $\Rightarrow$ Đường thẳng AB có hệ số góc bằng ± 1.

Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C) là nghiệm của phương trình:

$$y' = \pm 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{(2x+3)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow (2x+3)^2 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Khi đó, ta lần lượt có:

- Với x = − 2, ta được tiếp tuyến (d_1) có dạng y = −x − 2.
- Với x = −1, ta được tiếp tuyến (d_2) có dạng y = −x, tiếp tuyến này bị loại bởi nó đi qua gốc toạ độ O.

Vậy, tiếp tuyến cần tìm có phương trình y = −x − 2.

Cách 2: Điểm M(a; y(a)) thuộc đồ thị hàm số, khi đó phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$(d): y = y'(a)(x-a) + y(a) \Leftrightarrow (d): y = -\frac{1}{(2a+3)^2}(x-a) + \frac{a+2}{2a+3}$$

$$\Leftrightarrow (d): y = -\frac{1}{(2a+3)^2}x + \frac{2a^2+8a+6}{(2a+3)^2}.$$

Toạ độ giao điểm A của tiếp tuyến (d) với Ox là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -\dfrac{1}{(2a+3)^2}x + \dfrac{2a^2+8a+6}{(2a+3)^2} \end{cases} \Rightarrow A(2a^2+8a+6;\ 0).$$

Toạ độ giao điểm B của tiếp tuyến (d) với Oy là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{(2a+3)^2}x + \dfrac{2a^2+8a+6}{(2a+3)^2} \end{cases} \Rightarrow B\left(0;\ \frac{2a^2+8a+6}{(2a+3)^2}\right).$$

Để ΔOAB cân tại A điều kiện là:

$$OA = OB \Leftrightarrow \left|2a^2+8a+6\right| = \left|\frac{2a^2+8a+6}{(2a+3)^2}\right| \Leftrightarrow (2a+3)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = -1 \end{array}\right.$$

Khi đó, ta lần lượt có:

- Với a = – 2, ta được tiếp tuyến (d_1) có dạng y = –x – 2.
- Với a = –1, ta được tiếp tuyến (d_2) có dạng y = –x, tiếp tuyến này bị loại bởi nó đi qua gốc toạ độ O.

Vậy, tiếp tuyến cần tìm có phương trình y = –x – 2.

Câu II.

1. Đều kiện: $(1+2\sin x)(1-\sin x) \neq 0 \begin{cases} \sin x \neq -\dfrac{1}{2}. \\ \sin x \neq 1 \end{cases}$ (*)

Với điều kiện (*) biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$(1-2\sin x)\cos x = \sqrt{3}(1+2\sin x)(1-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - 2\sin x.\cos x = \sqrt{3}(1-2\sin^2 x + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}(\cos 2x + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{6}=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{6}=-x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Kết hợp với (*), ta được nghiệm của phương trình là:

$$x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}.$$

2. Điều kiện: $6-5x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq\frac{6}{5}$.

Sử dụng hai ẩn phụ: $\begin{cases} u=\sqrt[3]{3x-2} \\ v=\sqrt{6-5x},\ v\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3=3x-2 \\ v^2=6-5x \end{cases} \Rightarrow 5u^3+3v^2=8.$

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} 2u+3v-8=0 \\ 5u^3+3v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{8-2u}{3} \\ 5u^3+3\left(\frac{8-2u}{3}\right)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{8-2u}{3} \\ 15u^3+4u^2-32u+40=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{8-2u}{3} \\ (u+2)(15u^2-26u+20)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-2 \\ v=4 \text{ (thoả mãn)} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{6-5x}=4$$

$\Leftrightarrow 6-5x=16 \Leftrightarrow x=-2.$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Câu III. Biến đổi I về dạng:

$$I=\int_0^{\pi/2}\left(\cos^5 x-\cos^2 x\right)dx=\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos^5 x.dx}_{I_1}-\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos^2 x.dx}_{I_2}. \qquad (1)$$

Ta lần lượt:

- Với I_2 ta sử dụng công thức hạ bậc:

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}. \qquad (2)$$

- Với I_1 ta sử dụng phép biến đổi:

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\cos^4 x.\cos x.dx=\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 x\right)^2.\cos x.dx.$$

Đặt $t = \sin x$, suy ra $dt = \cos x.dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

Khi đó:

$$I_1 = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^2 dt = \int_0^1 \left(1 - 2t^2 + t^4\right) dt = \left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{15}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được $I = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$.

Câu IV. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

Vì (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên:

$$SI \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD}. \quad (1)$$

Ta có ngay:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD)AD = 3a^2. \quad (2)$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của S trên BC, suy ra:

$IK \perp BC$ (định lý ba đường vuông góc)

$\Rightarrow g((SBC) \text{ và } (ABCD)) = \widehat{SKI} = 60^0$.

Ta có nhận xét:

$$S_{\Delta IBC} = S_{ABCD} - (S_{\Delta IAB} + S_{\Delta ICD}) = 3a^2 - \frac{3a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

Mặt khác, ta cũng có:

$$S_{\Delta IBC} = \frac{1}{2}IK.BC = \frac{1}{2}IK.\sqrt{(AB - CD)^2 + AD^2}$$

$$\Leftrightarrow IK = \frac{2S_{\Delta IBC}}{\sqrt{(AB - CD)^2 + AD^2}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

Trong ΔSIK, ta có:

$$SI = IK.\tan\widehat{SKI} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.\tan 60^0 = \frac{3a\sqrt{15}}{5}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được $V_{S.ABCD} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.

Câu V. Đặt:

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = x + z \\ c = y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a + b - c) \\ y = \frac{1}{2}(a - b + c) \\ z = \frac{1}{2}(-a + b + c) \end{cases}.$$

Khi đó, điều kiện $x(x + y + z) = 3yz$ trở thành:

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab. \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow c^2 = (a + b)^2 - 3ab \geq (a + b)^2 - \frac{3}{4}(a + b)^2 = \frac{1}{4}(a + b)^2$$

$$\Leftrightarrow a + b \leq 2c. \quad (2)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a^3 + b^3 + 3abc \leq 5c^3 \Leftrightarrow (a + b)(a^2 + b^2 - ab) + 3abc \leq 5c^3$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (a + b)c^2 + 3abc \leq 5c^3 \Leftrightarrow (a + b)c + 3ab \leq 5c^2. \quad (3)$$

Từ (2), ta có:

$$(a + b)c \leq 2c^2. \quad (4)$$

Mặt khác:

$$ab \leq \frac{1}{4}(a + b)^2 \leq \frac{1}{4}(2c)^2 = c^2 \Leftrightarrow 3ab \leq 3c^2. \quad (5)$$

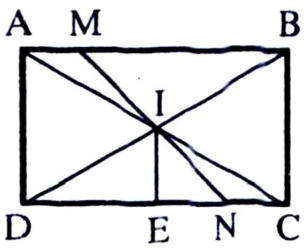
Cộng theo vế (4) và (5) ta được bất đẳng thức cần chứng minh (3).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 - ab \\ a = b = c \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Câu VI.a

1. Gọi N là điểm đối xứng với M qua I, suy ra N(11; −1) và N thuộc đường thẳng CD.



Ta lần lượt:

- Vì E thuộc đường thẳng (Δ) nên E(x; 5 − x), khi đó:

$$\overrightarrow{IE}(x - 6; 3 - x) \text{ và } \overrightarrow{NE}(x - 11; 6 - x).$$

- Vì E là trung điểm của CD nên:

$$IE \perp NE \Leftrightarrow \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{NE} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 6)(x - 11) + (3 - x)(6 - x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \text{ hoặc } x = 7.$$

Ta lần lượt:

- Với x = 6 thì phương trình đường thẳng AB được cho bởi:

$$(AB):\begin{cases}\text{Qua } M(1;5)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{IE}(0;-3)\end{cases}\Leftrightarrow (AB):\ y-5=0.$$

- Với x = 7 thì phương trình đường thẳng AB được cho bởi:

$$(AB):\begin{cases}\text{Qua } M(1;5)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{IE}(1;-4)\end{cases}\Leftrightarrow (AB):\ x-4y+19=0.$$

Vậy, bài toán có hai nghiệm về phương trình đường thẳng (AB).

2. Mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; 3) và bán kính R = 5.

Ta có:

$$d(I,(P))=\frac{|2.1-2.2-1.3-4|}{\sqrt{4+4+1}}=3<R$$

$\Rightarrow (P)\cap (S)=\{(C)\}$ là một đường tròn nằm trong mặt phẳng (P).

Đường tròn (C) có bán kính r và tâm H là hình chiếu vuông góc của I lên (P).

- Bán kính r được cho bởi:

$$r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4.$$

- Gọi (d) là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) (có vtpt $\overrightarrow{n_p}(2;-2;-1)$), ta có:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } I(1;2;3)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_p}(2;-2;-1)\end{cases}\Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-2t\\ z=3-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

- Khi đó, toạ độ của H là nghiệm x, y, z của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-2t\\ z=3-t\\ 2x-2y-z-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-2t\\ z=3-t\\ 2(1+2t)-2(2-2t)-(3-t)-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=0\\ z=2\end{cases}$$

$\Rightarrow H(3;0;2)$.

Vậy, mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) có bán kính bằng 4 và tâm H(3; 0; 2).

Câu VII.a. Với phương trình:

$$z^2+2z+10=0$$

ta có:

$$\Delta'=1-10=-9=9i^2\Rightarrow z_1=-1+3i \text{ và } z_2=-1-3i.$$

Từ đó, suy ra:

$$A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = [(-1)^2 + 3^2] + [(-1)^2 + (-3)^2] = 20.$$

Câu VI.b

1. Đường tròn (C) có tâm I(−2; −2) và bán kính $R = \sqrt{2}$.

   Nhận xét rằng:

$$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA.IB.\sin \widehat{AIB} \le \frac{1}{2} IA.IB$$

từ đó, suy ra $(S_{\Delta IAB})_{Max} = \frac{1}{2} IA.IB$, đạt được khi:

$$\sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^0 \Leftrightarrow IA \perp IB \Leftrightarrow d(I,(\Delta)) = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-2-2m-2m+3|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|1-4m|}{\sqrt{1+m^2}} = 1 \Leftrightarrow (1-4m)^2 = 1+m^2$$

$$\Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = \frac{8}{15}.$$

   Vậy, với $m = 0$ hoặc $m = \frac{8}{15}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

2. Ta lần lượt:

   - Chuyển phương trình đường thẳng (Δ_1) về dạng tham số:

$$(\Delta_1): \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = 6t - 9 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

     Khi đó, điểm M thuộc (Δ_1) thì M(t − 1; t; 6t − 9).

   - Đường thẳng (Δ_2) đi qua điểm A(1; 3; −1) và có vtcp $\overrightarrow{u_2}$ (2; 1; −2).

   Khi đó, ta lần lượt có:

   - Khoảng cách từ M tới đường thẳng (Δ_2) được cho bởi:

$$d_1 = d(M, (\Delta_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MA}, u_2\right]\right|}{|u_2|} = \sqrt{29t^2 - 88t + 68}.$$

   - Khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$d_2 = d(M, (P)) = \frac{|t-1-2t+12t-18-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{|11t-20|}{3}.$$

Từ đó, để $d_1 = d_2$ điều kiện là:

$$\sqrt{29t^2 - 88t + 68} = \frac{|11t - 20|}{3} \Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = \frac{53}{35}.$$

Từ đó:

- Với $t = 1$ ta được điểm $M_1(0 ; 1 ; -3)$.
- Với $t = \frac{53}{35}$ ta được điểm $M_2\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right)$.

Vậy, tồn tại hai điểm M_1, M_2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu VII.b. Điều kiện $xy > 9$. (*)

Biến đổi tương đương hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = \log_2(2xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 3^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - x^2 + x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = -2 \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (2; 2) và (−2; −2).

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI B NĂM 2009

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7.0 điểm)

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số:

$$y = 2x^4 - 4x^2. \quad (1)$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Với giá trị nào của m phương trình $x^2|x^2 - 2| = m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\sin x + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$.
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$.

Câu III: (1 điểm): Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2}.dx$.

Câu VI: (1 điểm): Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0, ΔABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của ΔABC. Tính thể tích khối tứ diện A'ABC theo a.

Câu V: (1 điểm): Cho các số thực x, y thay đổi thoả mãn $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1.$$

PHẦN RIÊNG (3.0 điểm)

Thí sinh được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI. a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) và hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) có phương trình:

$$(C): (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5},\ (\Delta_1): x - y = 0,\ (\Delta_2): x - 7y = 0$$

Xác định toạ độ tâm K và bán kính của đường tròn (C_1), biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) và tâm K thuộc đường tròn (C).

2. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh A(1; 2; 1), B(−2; 1; 3), C(2; −1; 1) và D(0; 3; 1). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C tới (P) bằng khoảng cách từ D tới (P).

Câu VII. a (1 điểm): Tìm số phức thoả mãn:

$$\begin{cases} |z - (2+i)| = \sqrt{10} \\ z.\bar{z} = 25 \end{cases}$$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI. b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho ΔABC cân tại A có đỉnh A(−1; 4) và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng (Δ): x − y − 4 = 0. Xác định toạ độ điểm B và C, biết diện tích ΔABC bằng 18.

2. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm A(−3; 0; 1), B(1; −1; 3) và mặt phẳng (P) phương trình:

$$(P): x - 2y + 2z - 5 = 0.$$

Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

Câu VII.b (1 điểm): Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 4.

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Với hàm số:

$$y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c, \text{ với } a \neq 0$$

ta lần lượt có:

Miền xác định D = **R**.

Đạo hàm:

- Đạo hàm cấp một:

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b).$$

Phương trình y' = 0 hoặc có một nghiệm (a.b ≥ 0) hoặc có ba nghiệm phân biệt. Do đó hàm số hoặc chỉ có một cực trị hoặc có ba cực trị.

- Đạo hàm cấp hai:

$$y'' = 12ax^2 + 2b.$$

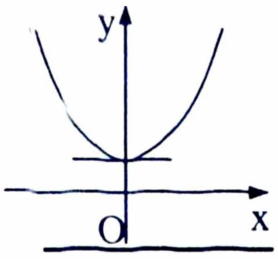
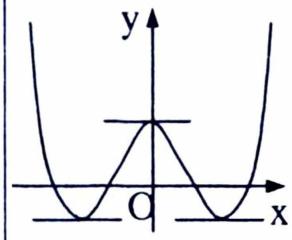
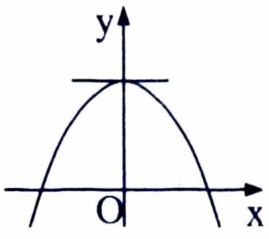
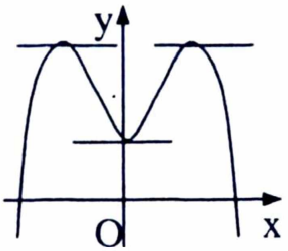
Do đó hàm số hoặc có hai điểm uốn hoặc không có điểm uốn.

Giới hạn:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} ax^4\left(1 + \frac{b}{ax^2} + \frac{c}{ax^4}\right) = \begin{cases} +\infty \text{ khi } a > 0 \\ -\infty \text{ khi } a < 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên: Dấu của y' phụ thuộc vào dấu của a (a > 0 hay a < 0) và dấu của a.b, do đó ta có bốn trường hợp biến thiên khác nhau.

Đồ thị của hàm số: Do có bốn trường hợp khác nhau về chiều biến thiên nên đồ thị của hàm trùng phương có bốn dạng sau đây:

Với a > 0		**Với a < 0**	
Có một cực trị	Có ba cực trị	Có một cực trị	Có ba cực trị
			

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM TRÙNG PHƯƠNG

Tính chất 1: Hàm số có cực trị với mọi giá trị của tham số sao cho a ≠ 0.

Tính chất 2: Hàm số có cực đại, cực tiểu

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \frac{b}{2a} < 0.$$

Tính chất 3: Hàm số có hai cực đại và một cực tiểu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

Tính chất 4: Hàm số có một cực đại và hai cực tiểu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}.$$

Tính chất 5: Hàm số có hai điểm uốn

$$\Leftrightarrow y'' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \frac{b}{2a} < 0.$$

Tính chất 6: Hàm số không có điểm uốn

$$\Leftrightarrow y'' = 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \frac{b}{2a} \geq 0.$$

Tính chất 7: Đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

Tính chất 8: Phương trình trùng phương:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ với } a \neq 0. \quad (1)$$

Đặt $t = x^2$ với $t \geq 0$, phương trình có dạng:

$$at^2 + bt + c = 0. \quad (2)$$

- Nếu (2) có nghiệm $t_0 \geq 0$ thì (1) có nghiệm $x = \pm\sqrt{t_0}$.
- (1) có nghiệm duy nhất
  $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 \leq 0 = t_2$.
- (1) có hai nghiệm phân biệt
  $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 < 0 < t_2$ hoặc $0 < t_1 = t_2$.
- (1) có ba nghiệm phân biệt
  $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $0 = t_1 < t_2$.
- (1) có bốn nghiệm phân biệt
  $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $0 < t_1 < t_2$.
- (1) có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng
  $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $0 = t_1 < t_2$ và $t_2 = 9t_1$.

Tính chất 9: Phương pháp tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số:

$$y = ax^4 + bx^2 + c$$

tiếp xúc với Ox tại hai điểm phân biệt

***Phương pháp 1*: Đại số**

Điều kiện là (1) có hai nghiệm kép phân biệt

$\Leftrightarrow ax^4 + bx^2 + c = a(x - x_1)^2(x - x_2)^2$ với $x_1 \neq x_2$. (3)

Sử dụng phương pháp hằng số bất định ta xác định được giá trị của tham số.

***Phương pháp 2*: Hàm số**

Miền xác định $D = \mathbf{R}$.

Đạo hàm:

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0. \qquad (4)$$

Điều kiện là

$$\begin{cases} \dfrac{b}{2a} < 0 \\ y(\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ 4ac - b^2 = 0 \end{cases}.$$

2. Dễ thấy phương trình được viết lại dưới dạng:

$$|2x^4 - 4x^2| = 2m$$

từ đó, phương trình có đúng 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = |2x^4 - 4x^2| = |f(x)|$ tại 6 điểm phân biệt.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ để suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$, ta có nhận xét:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Do đó đồ thị $y = |f(x)|$ gồm:

1. Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y = f(x)$.
2. Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của $y = f(x)$ qua trục hoành.

Câu II.

1. Dễ nhận thấy phương trình được cho dưới dạng hỗn tạp, tức chúng ta cần các phép biến đổi dần, với các định hướng là:
   - Chuyển phương trình về dạng chỉ chứa sinx (bởi trong phương trình có chứa $\sin^3 x$), hướng này không khả thi bởi sẽ rất phức tạp với cos4x.
   - Như vậy, cần hạ bậc $\sin^3 x$ và vì chúng ta không được cung cấp công thức hậc bậc bậc ba nên cần ghép nó với một toán tử tương ứng, ta có:

$$\left(\sin x - 2\sin^3 x\right) + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - 2\sin^2 x\right)\sin x + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

   - Bằng việc sử dụng công thức góc nhân đôi, ta biến đổi được:

$$\cos 2x.\sin x + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

   - Tiếp theo, bằng việc sử dụng công thức cộng, ta được:

$$\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

   - Tới đây, chúng ta gặp một dạng phương trình cơ bản được tổng quát:

$$a.\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos kx$$

hoặc $a.\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin kx$

và phương pháp giải nó tương tự cách 1 để giải phương trình

$$a.\sin x + b.\cos x = c$$

– Tham khảo định hướng trong câu II.1 của đề toán khối D – 2007. Cụ thể, ta biến đổi tiếp:

$$\frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x.$$

2. Đây là hệ phương trình không mẫu mực, do vậy để giải nó chúng ta cần có những đánh giá như sau:
   - Phương trình thứ nhất của hệ có bậc 2 và VP là bậc nhất của y.
   - Phương trình thứ hai của hệ có bậc 4 và VP là bậc hai của y^2. Và ở đây dễ nhận thấy $y = 0$ không phải là nghiệm của hệ.

   Từ đó, để hằng số hoá VP của các phương trình trong hệ chúng lần lượt chia nó cho y và y^2 để chuyển hệ về dạng:

$$\begin{cases} x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \end{cases}.$$

   Tới đây, bằng nhận định $x^2 + \dfrac{1}{y^2} = \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 - 2\dfrac{x}{y}$ và hai toán tử $x + \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{x}{y}$ tồn tại trong phương trình thứ nhất của hệ, nên ta sử dụng ẩn phụ:

$$u = x + \frac{1}{y} \text{ và } v = \frac{x}{y}.$$

   Hệ phương trình sẽ được chuyển về dạng:

$$\begin{cases} u + v = 7 \\ u^2 - v = 13 \end{cases}.$$

   Như vậy, chỉ cần sử dụng phương pháp thế chúng ta sẽ giải được hệ trên.

Câu III. Đây là tích phân được mở rộng từ dạng $I = \int_a^b f(x).\ln^n x.dx$ phương pháp được lựa chọn là "*Phương pháp tích phân từng phần*" với cách lựa chọn:

$$\begin{cases} u = 3 + \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{(x+1)^2} \end{cases}.$$

Câu IV. Đây là bài toán về hình học không gian có yêu cầu về kiến thức ở lớp 11, cụ thể:

- Góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0, tuy nhiên vì có giả thiết "*Hình chiếu vuông góc của điểm* B' *trên mặt phẳng* (ABC) *trùng với trọng tâm của* ΔABC", nên ta có ngay:

  $\widehat{B'BG} = 60^0$, với G là trọng tâm ΔABC.
- Để tính thể tích khối tứ diện A'ABC theo a, ta có đánh giá:

$$V_{A'ABC} = V_{B'ABC} = \frac{1}{3}B'G.S_{\Delta ABC}.$$

Câu V. Thông thường, với yêu cầu "*Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức* A *thoả mãn tính chất* K", trong đó K là một bất đẳng thức, các em học sinh cần định hướng rằng:

- Cần biến đổi A về dạng f(t).
- Từ K suy ra điều kiện cho biến t.
- Từ đó, xét hàm số f(t) ứng với điều kiện của t vừa tìm được.

Như vậy, với bài toán đã cho chúng ta sẽ lần lượt định hướng biến đổi như sau:

$$A = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^4+y^4) - 2(x^2+y^2) + 1$$

$$\geq \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2 + \frac{3}{4}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) + 1$$

$$= \frac{9}{4}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) + 1.$$

Đặt $t = x^2 + y^2$, ta có:

$$A \geq \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1 = f(t).$$

Từ đó, dẫn tới việc cần tìm điều kiện cho biến t từ giả thiết $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$, và để thực hiện công việc này chúng ta chỉ cần kết hợp nó với bất đẳng thức:

$(x+y)^2 \geq 4xy$.

Bằng cách cộng theo vế, chúng ta sẽ nhận được:

$$(x+y)^3 + 4xy + (x+y)^2 \geq 2 + 4xy$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 \geq 2 \Leftrightarrow x + y \geq 1$$

Khi đó:

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow t \geq \frac{1}{2}.$$

Công việc còn lại chỉ là xét hàm số f(t) với $t \geq \frac{1}{2}$.

Câu VI.a

1. Với yêu cầu "*Tìm điểm* M *thuộc đường tròn* (C): $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ *thoả mãn điều kiện* K", ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0; y_0)\in(C)$, suy ra:

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2.$$

Bước 2: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0.

Cách 2: Sử dụng phương trình tham số của đường tròn, như sau:

Bước 1: Chuyển phương trình đường tròn về dạng tham số:

$$(C):\begin{cases}x=a+R\sin t\\ y=b+R\cos t\end{cases},\ t\in[0,2\pi).$$

Bước 2: Điểm $M\in(C)\Rightarrow M(a+R\sin t; b+R\cos t)$.

Bước 3: Sử dụng điều kiện K để xác định cost, sint. Từ đó tìm được toạ độ của M dựa trên đẳng thức $\sin^2 t+\cos^2 t=1$.

Và trong bài toán này chúng ta sẽ sử dụng cách 1, cụ thể:

- Vì K(a; b) thuộc (C) nên:

$$(a-2)^2+b^2=\frac{4}{5}. \qquad (1)$$

- Vì (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) nên:

$$d(K,(\Delta_1))=d(K,(\Delta_2)). \qquad (2)$$

Giải hệ tạo bởi (1) và (2) chúng ta nhận được a, b (tức toạ độ của K), khi đó bán kính đường tròn (C_1) là $R_1=d(K,(\Delta_1))$.

2. Với các em học sinh chỉ biết đánh giá tuần tự:

- Mặt phẳng (P) đi qua A, B.
- Khoảng cách từ C tới (P) bằng khoảng cách từ D tới (P).

Chắc chắn sẽ thực hiện bài toán này theo các bước:

Bước 1: Giả sử phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$(P): Ax+By+Cz+D=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

Bước 2: Vì A, B thuộc (P) nên:

$$A+2B+C+D=0 \qquad (1)$$

$$-2A+B+3C+D=0. \qquad (2)$$

Bước 3: Để khoảng cách từ C tới (P) bằng khoảng cách từ D tới (P), điều kiện là:

$$\frac{|2A-B+C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3B+C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3)$$

Bước 4: Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3) để tìm cách biểu diễn ba trong bốn ẩn số A, B, C, D theo một ẩn còn lại. Từ đó, suy ra phương trình mặt phẳng (P) cần tìm.

Cách giải trên không sai và luôn là phương pháp được lựa chọn trong trường hợp tổng quát d(C, (P)) = k.d(D, (P)).

Tuy nhiên, vì d(C, (P)) = d(D, (P)) chúng ta sử dụng đánh giá:

Để mặt phẳng (P) cách đều hai điểm C, D chỉ có thể xảy ra hai trường hợp:

- (P) song song với CD.
- (P) đi qua trung điểm của CD.

Từ nhận xét trên, ta lần lượt:

- (P) song song với CD, suy ra:

$$(P):\begin{cases}\text{Qua } A\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{CD}\end{cases} \Leftrightarrow (P):\begin{cases}\text{Qua } A\\ \text{vtpt } \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right]\end{cases}$$

- (P) đi qua trung điểm I(1; 1; 1) cửa CD, suy ra:

$$(P):\begin{cases}\text{Qua } A\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AI}\end{cases} \Leftrightarrow (P):\begin{cases}\text{Qua } A\\ \text{vtpt } \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right]\end{cases}$$

Câu VII.a. Với yêu cầu này chúng ta chỉ cần giả sử số phức z = a + bi, rồi sử dụng công thức tính môđun. Khi đó chúng ta nhận được hệ phương trình:

$$\begin{cases}|a+bi-(2+i)|=\sqrt{10}\\ a^2+b^2=25\end{cases}$$

Câu VI.b.

1. Với yêu cầu của bài toán, chúng ta sẽ đi khai thác dần giả thiết:
   - Vì A và đường thẳng chứa B, C là (Δ) đã cho nên ta có ngay
     $$AH = d(A, (\Delta)).$$
   - Từ giả thiết về diện tích ΔABC, suy ra:
     $$BC = \frac{2S_{\Delta ABC}}{d(A, (\Delta))}.$$
   - Từ đó, với giả thiết ΔABC cân tại A, ta được:
     $$AB = AC = \sqrt{AH^2 + \frac{BC^2}{4}} = l.$$

   Khi đó, toạ độ của B, C thoả mãn hệ phương trình: $\begin{cases}(\Delta)\\ AB = l\end{cases}$.

2. Với yêu cầu của bài toán, chúng ta sẽ đi khai thác dần giả thiết:

- (d) song song với (P) nên nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P), suy ra:

$$(Q):\begin{cases}\text{Qua } A\\ (Q)//(P)\end{cases}.$$

- Gọi K, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B trên (d) và (Q), ta có:

$BK > BH \Rightarrow AH$ là đường thẳng cần tìm.

Từ đó, cần tìm toạ độ điểm H.

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua A}\\ \text{vtcp } \overline{AH}\end{cases}.$$

Câu VII.b. Với yêu cầu "*Tìm điều kiện của tham số để hai đồ thị hàm số* (C_1): $y = f(x)$ *và* (C_2): $y = g(x)$ *cắt nhau tại* k *giao điểm (phân biệt) thoả mãn tính chất* K ", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm:

$$f(x) = g(x). \qquad (1)$$

Bước 2: Để xét tính chất của các giao điểm chúng ta khéo léo đưa về việc xét tính chất nghiệm của phương trình (1).

☞ ***Chú ý***: Các kết quả thường được sử dụng trong bước 2 là:

1. Định lí Vi - ét cho phương trình đa thức:

- Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ta có:

$$\begin{cases}x_1 + x_2 = -b/a\\ x_1x_2 = c/a\end{cases}, \text{ ngoài ra } |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}.$$

- Phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta có:

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}\\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a}.\\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

2. Định lí đảo.
3. Hàm số.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI B NĂM 2009

Câu I.

1. Ta lần lượt có:

a. Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R}$.

b. Sự biến thiên của hàm số:

- Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} [2x^4(1 - \frac{2}{x^2})] = +\infty.$$

- Bảng biến thiên:

$$y' = 8x^3 - 8x,\ \ y' = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	CT -2	↗	CĐ 0	↘	CT -2	↗	$+\infty$

- Điểm uốn: $y'' = 24x^2 - 8,\ \ y'' = 0 \Leftrightarrow 24x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vì y'' đổi dấu khi x qua các điểm $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên đồ thị hàm số có hai điểm uốn là $U_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{10}{9}\right)$ và $U_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{10}{9}\right)$.

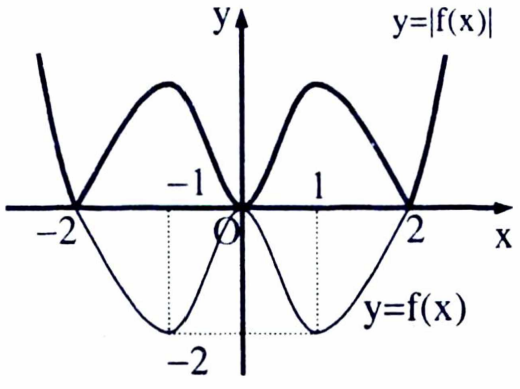
c. Đồ thị của hàm số: Ta tìm thêm vài điểm trên đồ thị A(–2; 0), B(2; 0).

2. Viết lại phương trình dưới dạng: $|2x^4 - 4x^2| = 2m$

phương trình có đúng 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = |2x^4 - 4x^2|$ tại 6 điểm phân biệt.

Đồ thị $y = |2x^4 - 4x^2|$ gồm:

- Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị (C): $y = 2x^4 - 4x^2$.
- Đối xứng phần đồ thị (C) phía dưới trục hoành qua trục hoành.



Từ đồ thị, yêu cầu của bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi:

$0 < 2m < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Câu II.

1. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\left(\sin x - 2\sin^3 x\right) + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - 2\sin^2 x\right)\sin x + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x.\sin x + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 3x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 4x = -3x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

2. Vì $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta biến đổi:

$$\left\{\begin{array}{l} x + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(x + \frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13 \end{array}\right.$$

Đặt $u = x + \frac{1}{y}$ và $v = \frac{x}{y}$, hệ phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left\{\begin{array}{l} u + v = 7 \\ u^2 - v = 13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u + v = 7 \\ u^2 + u - 20 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u + v = 7 \\ \left[\begin{array}{l} u = -5 \\ u = 4 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -5 \ \& \ v = 12 \\ u = 4 \ \ \& \ v = 3 \end{array}\right.$$

Ta lần lượt:

- Với $u = -5$ và $v = 12$ thì:

$$\left\{\begin{array}{l} x + \frac{1}{y} = -5 \\ \frac{x}{y} = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12y + \frac{1}{y} = -5 \\ x = 12y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12y^2 + 5y + 1 = 0 \\ x = 12y \end{array}\right.$$, vô nghiệm.

- Với u = 4 và v = 3 thì:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=4 \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+\dfrac{1}{y}=4 \\ x=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2-4y+1=0 \\ x=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=1/3 \end{array}\right. \\ x=3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \ \& \ y=1 \\ x=1 \ \& \ y=1/3 \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (3; 1) và $\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$.

Câu III. Đặt:

$$\begin{cases} u=3+\ln x \\ dv=\dfrac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=-\dfrac{1}{x+1} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I=-\frac{3+\ln x}{x+1}\Big|_1^3+\int_1^3\frac{dx}{x(x+1)}=\frac{3-\ln 3}{4}+\underbrace{\int_1^3\frac{dx}{x(x+1)}}_{I'}. \qquad (1)$$

Với I', ta có:

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{(A+B)x+A}{x(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}.$$

Từ đó, tích phân I' được viết lại dưới dạng:

$$I'=\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\ln|x|-\ln|x+1|\right)\Big|_1^3=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^3=\ln\frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $I=\dfrac{3-\ln 3}{4}+\ln\dfrac{3}{2}$.

Câu IV. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

Gọi D là trung điểm của AC và G là trọng tâm ΔABC, ta có:

$B'G \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{B'BG}=60^0$,

$$B'G=BB'.\sin\widehat{B'BG}=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ BG=\frac{a}{2} \Rightarrow BD=\frac{3a}{4}.$$

Trong ΔABC, ta có:

$$BC = \frac{AB\sqrt{3}}{2}, AC = \frac{AB}{2} \Rightarrow CD = \frac{AB}{4}$$

$$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Leftrightarrow \frac{3AB^2}{4} + \frac{AB^2}{16} = \frac{9a^2}{16}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{3a\sqrt{13}}{13},\ AC = \frac{3a\sqrt{13}}{26},\ S_{\Delta ABC} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{104}.$$

Khi đó: $V_{A'.ABC} = V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}B'G.S_{\Delta ABC} = \frac{9a^3}{208}.$

Câu V. Kết hợp bất đẳng thức $(x + y)^2 \geq 4xy$ với bất đẳng thức điều kiện, ta được:

$$(x + y)^3 + (x + y)^2 \geq 2 \Leftrightarrow x + y \geq 1.$$

Khi đó:

$$A = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^4 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$= \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1.$$

Đặt $t = x^2 + y^2$, ta có: $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow t \geq \frac{1}{2}.$

Ta được: $A \geq \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1 = f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}.$

Vậy, ta có $A_{Min} = \frac{9}{16}$, đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}.$

Câu VI.a

1. Giả sử K(a; b), khi đó ta lần lượt có:

   - Vì K thuộc (C) nên: $(a - 2)^2 + b^2 = \frac{4}{5}.$ (1)

   - Vì (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) nên:

$$d(K, (\Delta_1)) = d(K, (\Delta_2)) \Leftrightarrow \frac{|a - b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a - 7b|}{\sqrt{50}}$$

$$\Leftrightarrow 5|a - b| = |a - 7b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5(a - b) = a - 7b \\ 5(a - b) = -a + 7b \end{array}\right.$$

Khi đó, ta lần lượt:

- Với $5(a-b)=a-7b$ thì ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} b=-2a \\ (a-2)^2+b^2=\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ (a-2)^2+(-2a)^2=\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ 5a^2-4a+\dfrac{16}{5}=0 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

- Với $5(a-b)=-a+7b$ thì ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a=2b \\ (a-2)^2+b^2=\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ (2b-2)^2+b^2=\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 5b^2-8b+\dfrac{16}{5}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ b=\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{8}{5} \\ b=\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right).$$

Và từ đó, bán kính đường tròn (C_1) được cho bởi: $R_1=\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

Vậy, đường tròn (C_1) có tâm $K\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{4}{5}\right)$ và bán kính $R_1=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

2. Để mặt phẳng (P) cách đều hai điểm C, D chỉ có thể xảy ra hai trường hợp:

- (P) song song với CD.
- (P) đi qua trung điểm của CD.

Từ nhận xét trên, ta lần lượt:

- (P) song song với CD, suy ra:

$$(P):\begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{CD} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P):\begin{cases} \text{Qua } A(1;2;1) \\ \text{vtpt } \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(-8;-4;-14) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): 4x+2y+7z-15=0.$$

- (P) đi qua trung điểm I(1; 1; 1) của CD, suy ra:

$$(P):\begin{cases}\text{Qua } A\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AI}\end{cases} \Leftrightarrow (P):\begin{cases}\text{Qua } A(1;2;1)\\ \text{vtpt } \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]=(2;0;3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): 2x+3z-5=0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu VII.a. Giả sử $z = a + bi$, ta có:

$$\begin{cases}|a+bi-(2+i)|=\sqrt{10}\\ a^2+b^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|a-2+(b-1)i|=\sqrt{10}\\ a^2+b^2=25\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-2)^2+(b-1)^2=10\\ a^2+b^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+b=10\\ a^2+b^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3 \;\&\; b=4\\ a=5 \;\&\; b=0\end{cases}.$$

Vậy, tồn tại hai số phức $z = 3 + 4i$ hoặc $z = 5$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu VI.b

1. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (Δ), suy ra H là trung điểm của BC và:

$$AH = d(A,(\Delta)) = \frac{9}{\sqrt{2}} \Rightarrow BC = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AH} = 4\sqrt{2}.$$

$$AB = AC = \sqrt{AH^2 + \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{97}{2}}.$$

Khi đó, toạ độ của B, C thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-y-4=0\\ (x+1)^2+(y-4)^2=\dfrac{97}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y-4=0\\ \left[\begin{array}{l}x=11/2\\ x=3/2\end{array}\right.\end{cases}.$$

Vậy, toạ độ hai điểm $B\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $C\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$ hoặc ngược lại.

2. Gọi (d) là đường thẳng cần tìm.

Ta có:

- (d) nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P), suy ra:

$$(Q):\begin{cases}\text{Qua } A\\ (Q)//(P)\end{cases} \Leftrightarrow (Q): x-2y+2z+1=0.$$

- Gọi K, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B trên (d) và (Q), ta có:

$BK > BH \Rightarrow AH$ là đường thẳng cần tìm.

Từ đó, suy ra toạ độ của H thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{2} \\ x-2y+2z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/9 \\ y=11/9 \\ z=7/9 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{9};\frac{11}{9};\frac{7}{9}\right).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d):\begin{cases} \text{Qua } A(-3;0;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH}\left(\dfrac{26}{9};\dfrac{11}{9};-\dfrac{2}{9}\right) \text{ chọn (26; 11; -2)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d):\begin{cases} x=-3+26t \\ y=11t \\ z=1-2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

Câu VII.b. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với đồ thị hàm số là:

$$\frac{x^2-1}{x}=-x+m$$

$\Leftrightarrow f(x) = 2x^2 - mx - 1 = 0$ với $x \neq 0$. (1)

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt khi:

$\Delta_f > 0 \Leftrightarrow m^2 + 8 > 0$, luôn đúng.

Khi đó, (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là hoành độ của A, B thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{m}{2} \\ x_1.x_2=-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Để AB = 4, điều kiện là:

$AB^2 = 16 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 16 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)^2 = 16$

$$\Leftrightarrow 2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=16 \Leftrightarrow \frac{m^2}{2}+4=16 \Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt{6}.$$

Vậy, với $m = \pm 2\sqrt{6}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI D NĂM 2009

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7.0 điểm)

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số:

$$y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m,$$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 0$.
2. Tìm m để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x.\cos 2x - \sin x = 0.$
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 \\ (x+y)^2 - \dfrac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$

Câu III: (1 điểm): Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{dx}{e^x - 1}.$

Câu IV: (1 điểm): Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC).

Câu V: (1 điểm): Cho các số thực x, y thay đổi thoả mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy.$$

PHẦN RIÊNG (3.0 điểm)

Thí sinh được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI. a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho ΔABC có M(2; 0) là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình:

   $$7x - 2y - 3 = 0, 6x - y - 4 = 0.$$

   Viết phương trình đường thẳng AC.

2. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm A(2; 1; 0), B(1; 2; 2), C(1; 1; 0) và mặt phẳng (P): $x + y + z - 20 = 0$.

   Xác định toạ độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

Câu VII.a (1 điểm): Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn $|z - (3 - 4i)| = 2$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI. b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Gọi I là tâm của (C). Xác định toạ độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO} = 30^0$.

2. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (P) phương trình:

$$(\Delta): \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}, \quad (P): x + 2y - 3z + 4 = 0.$$

Viết phương trình đường thẳng (d) nằm trong (P) sao cho (d) cắt và vuông góc với đường thẳng (Δ).

Câu VII.b (1 điểm): Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng (d): $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc Oy.

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Tham khảo định hướng trong câu I.1 của đề toán khối B – 2009.
2. Tham khảo định hướng trong câu VII.b của đề toán khối B – 2009.

Câu II.

1. Dễ nhận thấy phương trình được cho dưới dạng hỗn tạp, tức chúng ta cần các phép biến đổi dần, với các định hướng là:
   - Có hai toán tử đơn là cos5x và sinx nhưng vì không có cùng hệ số nên không thể kết hợp chúng lại được. Từ đó, dẫn tới việc cần biến đổi tích 2sin3x.cos2x thành tổng, cụ thể phương trình được đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{3}\cos 5x - (\sin 5x + \sin x) - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x = 2\sin x.$$

   - Tới đây, chúng ta gặp một dạng phương trình cơ bản được tổng quát:

$$a.\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos kx$$

hoặc $a.\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin kx$

và phương pháp giải nó tương tự cách 1 để giải phương trình a.sinx + b.cosx = c – Tham khảo định hướng trong câu II.1 của đề toán khối D – 2007. Cụ thể, ta biến đổi tiếp:

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x.$$

2. Đây là hệ phương trình không mẫu mực, do vậy để giải nó chúng ta cần có những đánh giá như sau:
   - Phương trình thứ nhất của hệ có bậc 2.
   - Phương trình thứ hai của hệ thực chất có bậc 4. Và ở đây vì điều kiện $x \neq 0$ nên hệ được định hướng biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} x + y + 1 - \dfrac{3}{x} = 0 \\ (x+y)^2 - \dfrac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}.$$

   - Tới đây, chúng ta thấy ngay việc sử dụng ẩn phụ $u = x + y$ và $v = \dfrac{1}{x}$, hệ phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} u + 1 - 3v = 0 \\ u^2 - 5v^2 + 1 = 0 \end{cases}.$$

   Như vậy, chỉ cần sử dụng phương pháp thế chúng ta sẽ giải được hệ trên.

Câu III. Đây là tích phân chứa hàm số đặc biệt e^x (có đạo hàm là chính nó), do đó để đại số hoá nó chúng ta luôn sử dụng ẩn phụ $t = e^x$ hoặc $t = e^x - 1$ (sử dụng ẩn phụ cho toàn mẫu số).

Câu IV. Các em học sinh có thể thấy:

- Để tính thể tích khối tứ diện IABC, việc lựa chọn định I là dễ thấy bởi khi đó đáy sẽ là ΔABC và với giả thiết vuông tại B chúng ta tính được ngay diện tích của nó. Công việc cuối cùng trong phần này chỉ là đường cao hạ từ đỉnh I và nó được thực hiện dựa trên giải thiết lăng trụ đứng (Hạ IH vuông góc với AC, $H \in AC$, suy ra $IH \perp (ABC)$).
- Để tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC), chúng ta chỉ cần thực hiện:

  Hạ $AK \perp A'B$ ($K \in A'B$), ta có:

  $$BC \perp (ABB'A') \Rightarrow AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (IBC) \Rightarrow d(A,(IBC)) = AK$$

  Và để tính AK chúng ta thực hiện thông qua đánh giá:

$$S_{\Delta AA'B} = \frac{1}{2}AK.A'B \Leftrightarrow AK = \frac{2S_{\Delta AA'B}}{A'B} = \frac{AA'.AB}{\sqrt{A'A^2 + AB^2}}.$$

Câu V. Với điều kiện $x + y = 1$ và biểu thức:

$$A = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy.$$

có tính đối xứng, chúng ta có thể định hướng rằng:

- Cần biến đổi A về dạng f(t) với $t = xy$, cụ thể:

$$\begin{aligned} A &= 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 9xy + 25xy \\ &= 16x^2y^2 + 12[(x + y)^3 - 3xy(x + y)] + 34xy = 16x^2y^2 - 2xy + 12 \\ &= 16t^2 - 2t + 12. \end{aligned}$$

- Đó chính là một tam thức bậc hai theo t và vì yêu cầu "*Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của* A" nên dễ hiểu rằng chúng ta cần tìm điều kiện cho t, và công việc này khá đơn giản bởi ta có đánh giá:

$$0 \le xy \le \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \le t \le \frac{1}{4}.$$

- Bài toán được chuyển thành việc "*Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của* A *trên tập* $D = \left[0; \frac{1}{4}\right]$", nó được tổng quát hoá:

Để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số:

$$y = f(x)$$

trên [a; b], với f(x) liên tục trên đoạn [a; b] và có đạo hàm trong khoảng (a; b), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính đạo hàm y'

Bước 2: Tìm các điểm tới hạn thuộc (a; b) của hàm số (thông thường là giải phương trình $y' = 0$ để tìm các nghiệm $x \in (a; b)$). Giả sử các nghiệm là $x_1, x_2, ...$

Bước 3: Tính các giá trị $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ...$

Bước 4: Từ đó:

- $\min\limits_{x \in [a,b]} y = \text{Min}\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ...\}$.
- $\max\limits_{x \in [a,b]} y = \text{Max}\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ...\}$.

Quay lại bài toán, vì chúng ta phải sử dụng phương pháp gián tiếp nên cần tìm x, y ứng với t_0, tức là cần giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = t_0 \end{cases}$$

sử dụng định lý Vi – ét thì x, y là nghiệm của phương trình:

$$u^2 - u + t_0 = 0.$$

Câu VI.a

1. Các em học sinh hãy phác thảo hình ra nháp để tiện theo dõi việc định hướng sau:

- Chúng ta đều biết rằng, để viết được phương trình của một đường thẳng chúng ta cần biết hai điểm phân biệt thuộc đường thẳng đó hoặc một điểm thuộc đường thẳng và phương của nó. Trong bài toán này, vì đã biết được phương trình đường trung tuyến (gọi là (d_1)) và đường cao (gọi là (d_2)) qua đỉnh A nên có ngay $(d_1)\cap(d_2) = \{A\}$, từ đó toạ độ của A nghiệm của hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2), cụ thể:

$$\begin{cases} 7x - 2y - 3 = 0 \\ 6x - y - 4 = 0 \end{cases}.$$

- Công việc tiếp theo là lựa chọn việc tìm toạ độ điểm C hoặc phương của AC (AC song song với MN, N là trung điểm của BC và thuộc (d_1)). Với nhận định này, hẳn chúng ta lựa chọn đi tìm toạ độ điểm N. Vì $\{N\} = (d_1)\cap(BC)$ nên cần tìm phương trình đường thẳng (BC), ở đó:

  $(BC) \perp (d_2) \Rightarrow$ Đã biết được phương của (BC)

  Như vậy, chúng ta cần tìm được toạ độ điểm B và dễ thấy A, B đối xứng qua M nên khi biết được toạ độ của A chúng ta sẽ có toạ độ của B.

Từ định hướng trên, để giải bài toán trên chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm toạ độ điểm A (là giao điểm của (d_1) và (d_2)).

Bước 2: Suy ra toạ độ điểm B dựa trên tính chất điểm B đối xứng với A qua M.

Bước 3: Phương trình đường thẳng BC được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{Qua } B \\ BC \perp (d_2) \end{cases}.$$

Bước 4: Gọi N là trung điểm của BC, khi đó N là giao điểm của (BC) và (d_1), nên toạ độ của N nghiệm của hệ phương trình tạo bởi (BC) và (d_1).

Bước 5: Cuối cùng, phương trình đường thẳng AC được cho bởi:

$$(AC): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MN} \end{cases}.$$

2. Yêu cầu của bài toán là "*Xác định toạ độ điểm* D *thuộc đường thẳng* AB *sao cho đường thẳng* CD *song song với mặt phẳng* (P)", do vậy dễ thấy nó được tách thành hai phần:
   - Điểm D thuộc đường thẳng AB.
   - Đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

   Từ đó, dễ hình thành các bước cần thực hiện là:

   Bước 1: Với mặt phẳng (P) cần chỉ ra được vtpt $\overrightarrow{n_P}$.

   Bước 2: Viết phương trình tham số (giả sử là t) đường thẳng (AB), được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Bước 3: Vì D thuộc đường thẳng (AB) nên toạ độ của D thoả mãn phương trình tham số của (AB).

Bước 4: Khi đó, để đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) điều kiện là:

$$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Rightarrow \text{Giá trị tham số t}$$

$$\Rightarrow \text{Toạ độ điểm D.}$$

Câu VII.a. Với yêu cầu này chúng ta chỉ cần giả sử số phức z = x + yi, rồi sử dụng công thức tính môđun. Khi đó, chúng ta nhận được phương trình:

$$|x + yi - (3 - 4i)| = 2 \Leftrightarrow |x - 3 + (y + 4)i| = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4.$$

Vậy, tập hợp các số phức z là đường tròn (C) tâm I(3; –4) và bán kính R = 2.

Câu VI.b.

1. Với yêu cầu của bài toán, chúng ta sẽ đi khai thác dần giả thiết:

   - Vì M(a; b) thuộc (C) nên:

   $$(a-1)^2 + b^2 = 1. \qquad (1)$$

   - Tiếp theo, vì $\widehat{IMO} = 30^0$ nên:

   $$\cos 30^0 = \frac{\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MO}}{|\overrightarrow{MI}|.|\overrightarrow{MO}|}.$$

   Tuy nhiên, nếu biết nhận xét rằng O ∈ (C) nên IO = IM = 1, từ đó chúng ta sử dụng điều kiện:

   $$\widehat{OIM} = 120^0 \Rightarrow OM^2 = IO^2 + IM^2 - 2IO.IM.\cos 120^0$$

   $$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 3. \qquad (2)$$

   Giải hệ phương trình tạo bởi (1) và (2) chúng ta nhận được toạ độ điểm M.

2. Nhận xét rằng đường thẳng (Δ) cắt mặt phẳng (P) tại điểm A. Do đó, yêu cầu của bài toán được chuyển thành "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua* A, *nằm trong mặt phẳng* (P) *và vuông góc với đường thẳng* (Δ)", chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi $\vec{u}$ là một vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \\ \vec{u} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{n}\right].$$

Bước 2: Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtcp } \vec{u} \end{cases}.$$

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (R) qua A và vuông góc với (Δ).

Bước 2: Khi đó, đường thẳng (d) chính là giao tuyến của (P) và (R).

Câu VII.b. Với yêu cầu "*Tìm điều kiện của tham số để hai đồ thị hàm số* (C_1): $y = f(x)$ *và* (C_2): $y = g(x)$ *cắt nhau tại* k *giao điểm (phân biệt) thoả mãn tính chất* K ", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm:

$$f(x) = g(x). \qquad (1)$$

Bước 2: Để xét tính chất của các giao điểm chúng ta khéo léo đưa về việc xét tính chất nghiệm của phương trình (1).

☞ ***Chú ý***: Các kết quả thường được sử dụng trong bước 2 là:

1. Định lí Vi - ét cho phương trình đa thức:
   - Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ta có:
   $$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1x_2 = c/a \end{cases}, \text{ ngoài ra } |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}.$$
   - Phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta có:
   $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a}. \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$
2. Định lí đảo.
3. Hàm số.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI D NĂM 2009

Câu I.

1. Với m = 0, hàm số có dạng:

   $y = x^4 - 2x^2$.

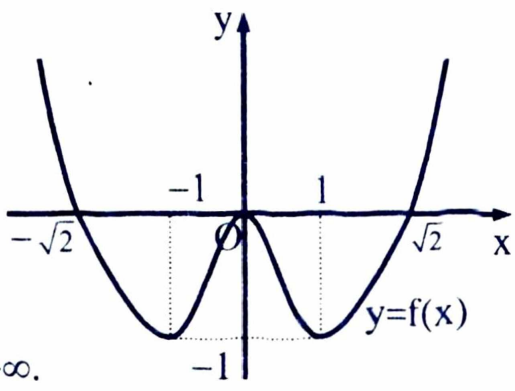
   Ta lần lượt có:

   a. Hàm số xác định trên D = $\mathbb{R}$.

   b. Sự biến thiên của hàm số:

   - Giới hạn của hàm số tại vô cực:

   $$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} [x^4(1 - \frac{2}{x^2})] = +\infty.$$



- Bảng biến thiên:

$$y' = 4x^3 - 4x,\ y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	CT -1	↗	CĐ 0	↘	CT -1	↗	$+\infty$

- Điểm uốn:

$$y'' = 12x^2 - 4,\ y'' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vì y'' đổi dấu khi x qua các điểm $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên đồ thị hàm số có hai điểm uốn là $U_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{9}\right)$ và $U_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{9}\right)$.

c. Đồ thị của hàm số: Ta tìm thêm vài điểm trên đồ thị $A(-\sqrt{2}\,; 0)$, $B(\sqrt{2}\,; 0)$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m = -1 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 3m + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x^2 = 3m + 1 \end{array}\right.$$

Từ đó, để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2 điều kiện là:

$$\begin{cases} 0 < 3m + 1 < 4 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Vậy, với $m \in \left(-\frac{1}{3}; 1\right) \setminus \{0\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu II.

1. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{3}\cos 5x - (\sin 5x + \sin x) - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x = 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3}-5x = x+2k\pi \\ \dfrac{\pi}{3}-5x = \pi - x+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18}-k\dfrac{\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

2. Điều kiện $x \neq 0$, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} x+y+1-\dfrac{3}{x}=0 \\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}.$$

Đặt $u = x+y$ và $v = \dfrac{1}{x}$, hệ phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} u+1-3v=0 \\ u^2-5v^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3v-1 \\ (3v-1)^2-5v^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3v-1 \\ 2v^2-3v+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=3v-1 \\ \left[\begin{array}{l} v=1 \\ v=1/2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2 \ \& \ v=1 \\ u=\dfrac{1}{2} \ \ \& \ v=\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Ta lần lượt:

- Với $u = 2$ và $v = 1$ thì:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ \dfrac{1}{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

- Với $u = v = \dfrac{1}{2}$ thì:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1; 1) và $\left(2; -\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu III. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt:

$$t = e^x - 1 \Rightarrow dt = e^x.dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{t+1}.$$

Đổi cận:

- Với x = 1 thì t = e − 1.
- Với x = 3 thì t = e^3 − 1.

Khi đó:

$$I = \int_{e-1}^{e^3-1} \frac{dt}{t(t+1)} = \int_{e-1}^{e^3-1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Big|_{e-1}^{e^3-1} = \ln\left|\frac{e^3-1}{e^3}\right| - \ln\left|\frac{e-1}{e}\right|$$

$$= \ln(e^2 + e + 1) - 2.$$

Cách 2: Đặt:

$$t = e^x \Rightarrow dt = e^x.dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{t}.$$

Đổi cận:

- Với x = 1 thì t = e.
- Với x = 3 thì t = e^3.

Khi đó:

$$I = \int_{e}^{e^3} \frac{dt}{t(t-1)} = \int_{e}^{e^3} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\Big|_{e}^{e^3} = \ln\left|\frac{e^3-1}{e^3}\right| - \ln\left|\frac{e-1}{e}\right|$$

$$= \ln(e^2 + e + 1) - 2.$$

Câu IV. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

a. Tính thể tích khối tứ diện IABC.

Hạ IH ⊥ AC (H ∈ AC), suy ra:

$$IH \perp (ABC) \Rightarrow V_{I.ABC} = \frac{1}{3} IH.S_{\Delta ABC}. \quad (1)$$

$$IH // AA' \Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3} AA' = \frac{4a}{3}. \quad (2)$$

Ta có:

$$AC^2 = A'C^2 - A'A^2 = 5a^2,$$

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 4a^2 \Rightarrow BC = 2a,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.BC = a^2. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được

$$V_{I.ABC} = \frac{4a^3}{9}.$$

b. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC).

Hạ AK ⊥ A'B (K ∈ A'B), ta có:

$$BC \perp (ABB'A') \Rightarrow AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (IBC).$$

Vậy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK và:

$$S_{\Delta AA'B} = \frac{1}{2}AK.A'B \Leftrightarrow AK = \frac{2S_{\Delta AA'B}}{A'B} = \frac{AA'.AB}{\sqrt{A'A^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu V. Biến đổi A về dạng:

$$A = 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 9xy + 25xy$$
$$= 16x^2y^2 + 12[(x + y)^3 - 3xy(x + y)] + 34xy = 16x^2y^2 - 2xy + 12.$$

Đặt t = xy, ta có đánh giá: $0 \le xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \le t \le \frac{1}{4}$.

Khi đó:

$$A = 16t^2 - 2t + 12, \text{ với } t \in D = \left[0; \frac{1}{4}\right]$$

ta có: $A' = 32t - 2$, $A' = 0 \Leftrightarrow 32t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{16}$.

Khi đó:

- $\text{MinA} = \text{Min}\left\{A(0), A\left(\frac{1}{4}\right), A\left(\frac{1}{16}\right)\right\} = A\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}$, đạt được khi:

$$t = \frac{1}{16} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \frac{1}{16} \end{cases}$$

tức x, y là nghiệm của phương trình:

$$u^2 - u + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow u = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow (x; y) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}; \frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) \text{ hoặc } (x; y) = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}; \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right).$$

$\text{MaxA} = \text{Max}\left\{A(0), A\left(\frac{1}{4}\right), A\left(\frac{1}{16}\right)\right\} = A\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}$, đạt được khi:

$$t = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \frac{1}{4} \end{cases}$$

tức x, y là nghiệm của phương trình:

$$u^2 - u + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2} \Rightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Câu VI.a

1. Gọi đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A là (d_1), (d_2).

   Ta lần lượt có:

- Điểm A là giao điểm của (d_1) và (d_2), nên toạ độ của A nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7x-2y-3=0 \\ 6x-y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A(1;2).$$

- Điểm B đối xứng với A qua M nên B(3; –2).
- Đường thẳng BC được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{Qua } B \\ BC \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): \begin{cases} \text{Qua } B(3;-2) \\ \text{vtpt } (1;6) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): x+6y+9=0.$$

- Gọi N là trung điểm của BC, khi đó N là giao điểm của (BC) và (d_1), nên toạ độ của N nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7x-2y-3=0 \\ x+6y+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(0;-\frac{3}{2}\right).$$

Cuối cùng, phương trình đường thẳng AC được cho bởi:

$$(AC): \begin{cases} \text{Qua } A(1;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MN}\left(-2;-\dfrac{3}{2}\right) \text{ chọn } (4;3) \end{cases} \Leftrightarrow (AC): \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}$$

$$\Leftrightarrow (AC): 3x-4y+5=0.$$

2. Mặt phẳng (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}(1;1;1)$.

Phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{Qua } A(2;1;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(-1;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \\ z=2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì D thuộc đường thẳng (AB) nên D(2 – t; 1 + t; 2t).

Khi đó, để đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) điều kiện là:

$$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{n_P}=0 \Leftrightarrow (1-t;t;2t).(1;1;1)=0$$

$$\Leftrightarrow 1.(1-t)+1.t+1.2t=0 \Leftrightarrow 2t+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2} \Rightarrow D\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};-1\right).$$

Vậy, với điểm $D\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2};-1\right)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu VII.a. Giả sử z = x + yi, ta có:

$$|x+yi-(3-4i)|=2 \Leftrightarrow |x-3+(y+4)i|=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=4.$$

Vậy, tập hợp các số phức z là đường tròn (C) tâm I(3; –4) và bán kính R = 2.

Câu VI.b

1. Giả sử M(a; b), khi đó ta lần lượt có:

   - Vì M thuộc (C) nên: $(a-1)^2+b^2=1$. (1)
   - Nhận xét rằng O ∈ (C) nên IO = IM = 1, từ đó:

$$\widehat{OIM}=120^0 \Rightarrow OM^2=IO^2+IM^2-2IO.IM.\cos 120^0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2=3. \quad (2)$$

   Từ (1) và (2) ta có hệ tích phân:

$$\begin{cases}(a-1)^2+b^2=1\\ a^2+b^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-2a+b^2=0\\ a^2+b^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-2a=0\\ a^2+b^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}.$$

   Vậy, tồn tại hai điểm $M_1\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $M_2\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

2. Ta lần lượt có:

   - Đường thẳng (Δ) có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(1;1;-1)$.
   - Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1;2;-3)$.

   Suy ra, đường thẳng (Δ) sẽ cắt mặt phẳng (P) tại điểm A.

   Xét hệ phương trình tạo bởi (Δ) và (P) là:

$$\begin{cases}x+2y-3z+4=0\\ \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=1\\ z=1\end{cases}\Rightarrow A(-3;\,1;\,1).$$

   Tới đây ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta được:

$$\vec{u}=\left[\vec{n},\overrightarrow{u_\Delta}\right]=(1;\,-2;\,-1).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } A(-3;1;1)\\ \text{vtcp } \vec{u}(1;\,-2;\,-1)\end{cases}\Leftrightarrow(d):\begin{cases}x=-3+t\\ y=1-2t\\ z=1-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Cách 2: Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (Δ), ta được:

$$(Q):\begin{cases}\text{Qua } A(-3;1;1)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_\Delta}(1;\,1;\,-1)\end{cases}\Leftrightarrow (Q):\ x+y-z+3=0.$$

Khi đó, đường thẳng (d) là giao tuyến của (P) và (Q) nên các điểm thuộc (d) thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+2y-3z+4=0 \\ x+y-z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x=-2-t \\ y=-1+2t, t\in\mathbb{R}. \\ z=t \end{cases}$$

Câu VII.b. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với đồ thị hàm số là:

$$\frac{x^2+x-1}{x}=-2x+m \Leftrightarrow f(x)=3x^2-(m-1)x-1=0 \text{ với } x\neq 0. \quad (1)$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B khi:

(1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \Delta_1 > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2+12>0$, luôn đúng.

Khi đó, (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là hoành độ của A, B thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{m-1}{3} \\ x_1.x_2=-\dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Để trung điểm của AB là với hoành độ $x_1=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m-1}{6}$ thuộc Oy, điều kiện là:

$$x_1=0 \Leftrightarrow \frac{m-1}{6}=0 \Leftrightarrow m=1.$$

Vậy, với m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2008

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số:

$$y=\frac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}, \text{ m là tham số.} \quad (1)$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m=-1$.
2. Tìm m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right).$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\dfrac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\dfrac{5}{4} \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu III: (2 điểm): Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(2; 5; 3) và đường thẳng:

$$(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

1. Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng (d).
2. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d) sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

Câu IV: (2 điểm)

1. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/6} \frac{\tan^4 x.dx}{\cos 2x}$.
2. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt:

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} - 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m, (m \in \mathbb{R}).$$

PHẦN TỰ CHỌN

Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của Elíp (E), biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.
2. Cho khai triển $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + ...+ a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số $a_0, a_1, ..., a_n$ thoả mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ..., a_n$.

Câu V.b Theo chương trình THPT phân ban (2 điểm)

1. Giải phương trình $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$.
2. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối chóp A'.ABC và tính côsin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Với hàm số:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$, với $ad \neq 0$, tử, mẫu không có nghiệm chung

ta lần lượt có:

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{dx + e}.$$

a. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{e}{d}\}$.

b. Sự biến thiên của hàm số:

- Giới hạn của hàm số tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

$$\lim_{x \to \infty} y = \infty.$$

$\lim\limits_{x \to -e/d} y = \infty$ nên $x = -\frac{e}{d}$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x \to \infty} [y - (\alpha x + \beta)] = 0$ nên $y = \alpha x + \beta$ là đường tiệm cận xiên.

- Bảng biến thiên: $y' = \alpha - \frac{\gamma d}{(dx + e)^2} = \frac{\alpha(dx + e)^2 - \gamma d}{(dx + e)^2}$,

Dấu của đạo hàm là dấu của tam thức $g(x) = \alpha(dx + e)^2 - \gamma d$.

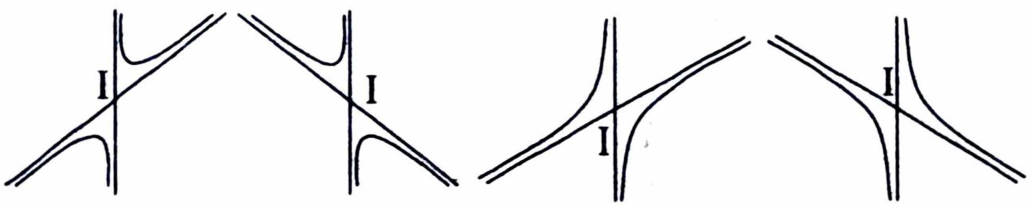
Vậy phương trình $y' = 0$ hoặc vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt. Do đó hàm số hoặc không có cực trị hoặc có hai cực trị.

Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-e/d$	$+\infty$
y'			
y			

Dựa vào bảng biến thiên đưa ra kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến và cực trị của hàm số.

c. Đồ thị: Do có bốn trường hợp khác nhau về chiều biến thiên nên đồ thị của hàm số có bốn dạng.



MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ BẬC HAI TRÊN BẬC NHẤT

Tính chất 1: Hàm số đồng biến trên D khi:

$$\begin{cases} -\frac{e}{d} \notin D \\ y' \geq 0, \forall x \in D \end{cases}.$$

Tính chất 2: Hàm số có cực đại, cực tiểu khi:

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$.

Khi đó:

- Giá trị cực trị của hàm số tại x_0 là $y(x_0) = \frac{2ax_0 + b}{d}$.
- Phương trình đường thẳng đi qua cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số có dạng $y = \frac{1}{d}(2ax + b)$.

Tính chất 3: Hàm số có hai cực trị trái dấu khi:

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$ và phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm.

Tính chất 4: Hàm số có hai cực trị cùng dấu khi:

$y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$ và phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Tính chất 5: Đồ thị nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Hướng dẫn chứng minh

Bước 1: Thật vậy, dời trục bằng tịnh tiến về gốc $I(x_0, y_0)$, với công thức dời trục: $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$.

Thay x, y vào phương trình hàm số ta được:

$$Y = F(X).$$

Bước 2: Hàm số này là hàm lẻ nên đồ thị nhận I làm tâm đối xứng.

Tính chất 6: M là điểm tuỳ ý thuộc đồ thị hàm số. Ta có:

a. Tích các khoảng cách từ M tới hai đường tiệm cận là một hằng số.

b. Nếu tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B thì:
   - M là trung điểm AB.
   - ΔIAB có diện tích không đổi.

Hướng dẫn chứng minh

Ta lần lượt xác định:

- Miền xác định D.
- Đạo hàm y'.
- Các đường tiệm cận, suy ra toạ độ giao điểm I của hai tiệm cận.
- M là điểm tuỳ ý thuộc đồ thị, có hoành độ bằng a $\Rightarrow$ M(a, y(a)).

a. Ta có:

- Khoảng cách từ M tới tiệm cận đứng được cho bởi d_1.
- Khoảng cách từ M tới tiệm cận xiên được cho bởi d_2.

Suy ra:

$d_1.d_2$ = hằng số.

b. M(a; y(a)) ta có:

- Phương trình tiếp tuyến (t_M) tại M có dạng:

$$y - y(a) = y'(a)(x - a).$$

- Xác định toạ độ giao điểm A của (t_M) và tiệm cận đứng.
- Xác định toạ độ giao điểm B của (t_M) và tiệm cận xiên.

Nhận xét rằng:

$$x_A + x_B = 1 + 2a - 1 = 2a = 2x_M.$$

Vậy M là trung điểm AB.

Diện tích ΔIAB được cho bởi:

$$S = \frac{1}{2} IA.IB.\sin AIB = \frac{1}{2} |y_A - y_I|.|x_B - x_I| \text{ không phụ thuộc a.}$$

2. Yêu cầu của bài toán được chia thành hai phần:

Phần I: Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận, với hàm số:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

ta lần lượt thực hiện:

Bước 1: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{dx + e}.$$

Bước 2: Khi đó, để hàm số có hai đường tiệm cận điều kiện là $\gamma \neq 0$.

Và ta được:

$$\lim_{x \to -e/d} y = \infty \text{ nên } x = -\frac{e}{d} \text{ là đường tiệm cận đứng.}$$

$$\lim_{x \to z} [y - (\alpha x + \beta)] = 0 \text{ nên } y = \alpha x + \beta \text{ là đường tiệm cận xiên.}$$

Phần II: Tìm điều kiện để hai đường tiệm cận tạo với nhau một góc α, ta lần lượt thực hiện:

Bước 1: Chỉ ra các vtpt $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ của hai đường tiệm cận.

Bước 2: Khi đó: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$.

Bước 3: Kết luận.

Câu II.

1. Chúng ta đi đánh giá lần lượt:

$$VP = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) = 4\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4} - x\right) = 4\sin\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) = -4\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$
$$= -2\sqrt{2}\left(\sin x + \cos x\right),$$

$$\frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow VT = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x.\cos x}.$$

Tức cả hai vế sẽ có nhân tử chung là (sinx + cosx), điều đó khẳng định rằng phương trình sẽ được chuyển về dạng tích để giải. Và cụ thể chúng ta sẽ thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình. (*)

Bước 2: Sử dụng các phép biến đổi như trên để chuyển phương trình về dạng tích:

$$(\sin x + \cos x).f(x) = 0 \Rightarrow \text{Nghiệm}.$$

Bước 3: Kết hợp với (*) để đưa ra kết luận về nghiệm cho phương trình.

2. Đây là hệ phương trình không mẫu mực, do vậy để giải nó chúng ta cần có những đánh giá như sau:

- Phương trình thứ nhất của hệ có thể được phân chia như sau:

$$x^2 + y + xy(x^2 + y) + xy = -\frac{5}{4}$$

Tức là, nó được xây dựng dựa trên bộ cơ sở $x^2 + y$ và xy.

- Chúng ta thử định hướng biến đổi phương trình thứ hai của hệ theo $x^2 + y$ và xy, cụ thể:

$$x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow (x^2 + y)^2 + xy = -\frac{5}{4}.$$

Từ đó, bằng việc sử dụng ẩn phụ $u = x^2 + y$ và v=xy, hệ phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} u + uv + v = -\dfrac{5}{4} \\ u^2 + v = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Hệ này được giải dễ dàng bằng phương pháp thế.

Cuối cùng với $(u_0; v_0)$ tìm được chúng ta sẽ có hệ mới: $\begin{cases} x^2 + y = u_0 \\ xy = v_0 \end{cases}$.

Như vậy, chỉ cần sử dụng phương pháp thế chúng ta sẽ giải được hệ trên.

Câu III.

1. Với mong muốn cung cấp cho các em học sinh một lượng kiến thức tổng quát là *"Tìm điểm* M *thuộc đường thẳng* (d) *thoả mãn điều kiện* K*"*, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ y = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ (có vtcp } \vec{u}(a; b; c)\text{)}.$$

Bước 2: Điểm $M \in (d)$, suy ra $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$

Bước 3: Thiết lập tính chất K cho điểm M.

Cách 2: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó:

$$(d) \cap (L) = \{M\}.$$

Chúng ta thường gặp:

1. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất (hoặc được phát biểu dưới dạng *"Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc* M *của* O *trên* (d)").

Khi đó, nếu sử dụng cách 1 thì bước 3 có nội dung:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2 + (z_0 + ct)^2$$

$$= At^2 + Bt + C \geq \frac{\Delta}{4A}$$

Vậy, ta được $\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)_{Min} = -\frac{\Delta}{4A}$ đạt được khi $t = -\frac{b}{2A} \Rightarrow M$.

2. Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d).

Khi đó:

- Nếu sử dụng cách 1 thì bước 3 có nội dung:

  $AM \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \Rightarrow$ Giá trị $t \Rightarrow$ Toạ độ H.
- Nếu sử dụng cách 2 thì thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Xác định vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng (d).

  Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (P) thoả mãn:

  $$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P) \perp (d) \end{cases}.$$

Bước 3: Hình chiếu vuông góc M của A lên đường thẳng (d) là giao điểm của (d) và (P).

Từ việc xác định được toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên (d), chúng ta thực hiện được việc:

- Tìm toạ độ điểm M thuộc (d) sao cho độ dài AM ngắn nhất.
- Tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua (d), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d).

Bước 2: Suy ra toạ độ điểm A_1 từ điều kiện M là trung điểm của AA_1.

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Xác định vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d).

Bước 2: Giả sử $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm M của } AA_1 \text{ thuộc (d)} \\ AA_1 \perp (d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M\left(\frac{x+x_A}{2}; \frac{y+y_A}{2}; \frac{z+z_A}{2}\right) \in (d) \\ \overrightarrow{AA_1}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ } A_1.$$

- Viết phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với (d) và cắt (d), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d).

Bước 2: Suy ra đường thẳng (AM) là đường thẳng cần dựng.

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa đường thẳng (d).

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với đường thẳng (d).

Bước 3: Đường thẳng cần tìm chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

- Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (d), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d).

Bước 2: Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R=AM} \end{cases}.$$

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d) thì ta có:

$$R = d(A, (d)).$$

Bước 2: Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R} \end{cases}.$$

- Viết phương trình mặt cầu tâm A và cắt (d) tại hai điểm E, F sao cho EF = *l*, cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d). Ta có M là trung điểm của đoạn EF.

Bước 2: Mặt cầu (S) cần dựng được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính } R=AE=\sqrt{AM^2 + EM^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính } R=\sqrt{AM^2 + \left(\frac{EF}{2}\right)^2} \end{cases}.$$

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (d) (khi đó M là trung điểm của đoạn EF) và R là bán kính mặt cầu (S) cần dựng thì ta có:

$$R=AE=\sqrt{AM^2 + EM^2} = \sqrt{d^2(A, (d)) + \left(\frac{EF}{2}\right)^2}.$$

Bước 2: Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R} \end{cases}.$$

2. Sử dụng đánh giá rằng nếu gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P), ta có:

$d(A, (P)) = AK < AH$ – tính chất đường vuông góc và đường xiên.

Do đó, khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi và chỉ khi K ≡ H. Suy ra, mặt phẳng (P) cần dựng sẽ đi qua H, do đó:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AH} \end{cases}.$$

Kết hợp hai câu 1), câu 2) chúng ta đưa ra được lược đồ để giải bài toán "*Viết phương trình mặt phẳng* (P) *chứa* (d) *sao cho khoảng cách từ* A *đến* (P) *lớn nhất*", bằng cách thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc H của A trên (d).

Bước 2: Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P), ta có:

$$d(A, (P)) = AK < AH$$

tính chất đường vuông góc và đường xiên.

Bước 3: Do đó, khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi và chỉ khi $K \equiv H$. Suy ra, mặt phẳng (P) cần dựng sẽ đi qua H, do đó:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AH} \end{cases}.$$

Câu IV.

1. Nhận xét rằng với tích phân chứa $\tan^n x$, nếu muốn sử dụng ẩn phụ $t = \tan x$, chúng ta cần có sự xuất hiện của $\dfrac{dx}{\cos^2 x}$, và điều này được thực hiện thông qua biến đổi:

$$\frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{(1 - \tan^2 x)\cos^2 x}.$$

Từ đó, khẳng định được rằng tích phân I sẽ tính được thông qua phương pháp đổi biến $t = \tan x$.

2. Khi gặp bất một phương trình không mẫu mực dạng $f(x) = m$, hầu hết các em học sinh đều biết tới một phương pháp hiệu quả đó là sử dụng đạo hàm để xét sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$, từ đó sử dụng tính tương giao của nó với đường thẳng $y = m$.

Với phương trình này, khi đặt VT của phương trình là $f(x)$, chúng ta đi xét hàm số này trên tập $D = [0; 6]$ (điều kiện có nghĩa của phương trình), ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[4]{2x}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{6-x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}.$$

Vấn đề tới đây là tìm cách giải phương trình $f'(x) = 0$ thì mới có thể tạo ra được bảng biến thiên. Với các em học sinh chưa có kinh nghiệm thì đây là công việc khó, nên để bắt đầu các em hãy xét phương trình dạng tổng quát:

$$u + v = 0. \qquad (*)$$

Nếu phương trình (*) có: $\begin{cases} u(x_0) = 0 \\ v(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x_0) + v(x_0) = 0$

$\Leftrightarrow x = x_0$ là nghiệm của phương trình (*).

Từ đó, để giải phương trình $f'(x) = 0$ chúng ta sử dụng biến đổi:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{2x}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{6-x}}\right)}_{u(x)} + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}\right)}_{v(x)} = 0. \qquad (1)$$

Nhận xét rằng:

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt[4]{2x}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{6-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{2x} = \sqrt[4]{6-x} \Leftrightarrow x = 2.$$

$$v(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x} = \sqrt{6-x} \Leftrightarrow x = 2.$$

Suy ra x = 2 là nghiệm của (1). Tới đây, để có được dấu của f'(x) trong bảng biến thiên các em học sinh cần nhận xét thêm rằng:

- Khi $x \in [0; 2)$ thì u(x), v(x) cùng âm, do đó $f'(x) < 0$.
- Khi $x \in (2; 6]$ thì u(x), v(x) cùng dương, do đó $f'(x) > 0$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		6
y'		–	0	+	0
y	f(0)	↗	f(2)	↘	f(6)

Câu V.a.

1. Với yêu cầu lập phương trình chính tắc elíp (E), chúng ta giả sử:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ 0 < b < a.$$

Từ đó, cần tìm a, b (hoặc a^2, b^2) bằng cách thiết lập một hệ hai phương trình với ẩn a, b (hoặc a^2, b^2).

2. Định hướng giải quyết bài toán gồm hai phần:

Phần 1: Tìm n từ biểu thức điều kiện: $a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = 4096$

biết $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$. (*)

Và để thực hiện điều này các em học sinh chỉ cần thay $x = \frac{1}{2}$ vào (*) thì sẽ có được: $2^n = 4096$

Phần 2: Tìm $k \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $a_k = C_n^k 2^k$ lớn nhất. Ta xét:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Leftrightarrow \frac{C_n^{k+1}.2^{k+1}}{C_n^k.2^k} > 1.$$

Câu V.b.

1. Phương trình được giải theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình. (*)

Bước 2: Sử dụng các phép biến đổi: $\log_a a.b = 1 + \log_a b$ và $\log_b a^n = n.\log_b a$.

Chúng ta sẽ chuyển được phương trình về dạng chỉ chứa $\log_a b$ và $\log_b a$. Từ đó, sử dụng ẩn phụ $t = \log_a b$ để giải phương trình.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện (*) rồi kết luận về nghiệm của bất phương trình.

2. Công việc:

- Tính thể tích của khối chóp A'.ABC khá đơn giản bởi chúng ta có ngay:

$$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6}A'H.AB.AC.$$

với H là hình chiếu vuông góc của A' trên BC.

- Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C' dựa trên khẳng định:

$$g(A'A, B'C') = \widehat{B'BH}.$$

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2008

Câu I.

1. Với m = 1 hàm số có dạng:

$$(H): y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 3} \Leftrightarrow (H): y = x - 2 + \frac{4}{x + 3}.$$

Ta lần lượt có:

a. Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

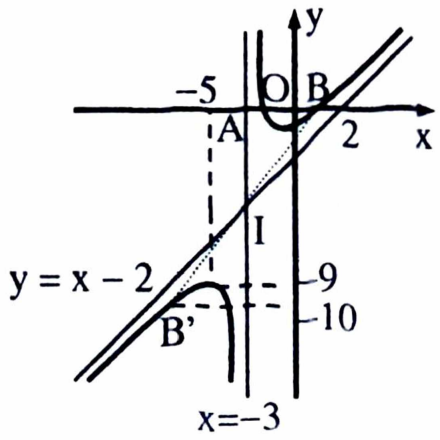
b. Sự biến thiên của hàm số:

- Giới hạn của hàm số tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -3} y = \infty$ nên $x = -3$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x \to \infty}[y - (x - 2)] = 0$ nên $y = x - 2$ là đường tiệm cận xiên.



- Bảng biến thiên:

$$y' = 1 - \frac{4}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x+3)^2},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -5 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ -9	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	CT -1	↗	$+\infty$

c. Đồ thị của hàm số: Lấy thêm các điểm $A(-2; 0)$, $B(1; 0)$.

2. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = mx - 2 + \frac{6m-2}{x+3m}.$$

Khi đó:

- Với:

$$6m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$$ đồ thị hàm số không có hai tiệm cận.

- Với $m \neq \frac{1}{3}$ đồ thị hàm số có hai tiệm cận là:

Tiệm cận đứng (d_1): $x = -3m \Leftrightarrow (d_1)$: $x + 3m = 0 \Rightarrow$ vtpt $\overrightarrow{n_1}(1; 0)$.

Tiệm cận xiên (d_2): $y = mx - 2 \Leftrightarrow (d_2)$: $mx - y - 2 = 0 \Rightarrow$ vtpt $\overrightarrow{n_2}(m; -1)$.

Để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0 điều kiện là:

$$\cos 45^0 = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy, với $m = \pm 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu II.

1. Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 4\sin\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\sin x.\cos x} = -2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(\frac{2}{\sin 2x} + 2\sqrt{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

2. Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} x^2+y+xy(x^2+y)+xy=-\dfrac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases}.$$

Đặt $u=x^2+y$ và $v=xy$, hệ phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} u+uv+v=-\dfrac{5}{4} \\ u^2+v=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+u\left(-\dfrac{5}{4}-u^2\right)-\dfrac{5}{4}-u^2=-\dfrac{5}{4} \\ v=-\dfrac{5}{4}-u^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3+u^2+\dfrac{u}{4}=0 \\ v=-\dfrac{5}{4}-u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ v=-\dfrac{5}{4}-u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u=0 & \& \ v=-\dfrac{5}{4} \\ u=-\dfrac{1}{2} & \& \ v=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Ta lần lượt:

- Với $u=0$ và $v=-\dfrac{5}{4}$ thì:

$$\begin{cases} x^2+y=0 \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2 \\ x(-x^2)=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \\ y=-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} \end{cases}.$$

- Với $u=-\dfrac{1}{2}$ và $v=-\dfrac{3}{2}$ thì:

$$\begin{cases} x^2+y=-\dfrac{1}{2} \\ xy=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{3}{2x}=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3+x-3=0 \\ y=-\dfrac{3}{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có ba cặp nghiệm $\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right)$, $\left(-\dfrac{3}{2};1\right)$ và $\left(1-\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu III. Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(2; 1; 2)$.

1. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d), ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì điểm $H \in (d)$ nên $H(1 + 2t; t; 2 + 2t)$, suy ra $\vec{AH}(-1 + 2t; t - 5; -1 + 2t)$.

Để H là hình chiếu vuông góc của A lên (d) điều kiện là:

$$AH \perp (d) \Leftrightarrow \vec{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{AH}.\vec{u} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2.(-1 + 2t) + 1(t - 5) + 2(-1 + 2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(3; 1; 4).$$

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (P) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua A}(2; 5; 3) \\ \text{vtpt } \vec{u}(2; 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x + y + 2z - 15 = 0.$$

Vì $\{H\} = (d) \cap (P)$ nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2} \\ 2x + y + 2z - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \Rightarrow H(3; 1; 4). \\ z = 4 \end{cases}$$

2. Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P), ta có:

$d(A, (P)) = AK < AH$ – tính chất đường vuông góc và đường xiên.

Do đó, khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi và chỉ khi $K \equiv H$. Suy ra, mặt phẳng (P) cần dựng sẽ đi qua H, do đó:

$$\bullet\ (P): \begin{cases} \text{Qua A}(2;5;3) \\ \text{vtpt } \vec{AH}(1;-4;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x - 4y + z + 15 = 0.$$

Câu IV.

1. Biến đổi tích phân về dạng:

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\tan^4 x.dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \int_0^{\pi/6} \frac{\tan^4 x.dx}{(1 - \tan^2 x)\cos^2 x}$$

Đặt $t = \tan x$, suy ra $dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 0$.
- Với $x = \dfrac{\pi}{6}$ thì $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Khi đó:

$$I=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{t^4.dt}{1-t^2}=-\int_0^{1/\sqrt{3}}\left(\frac{t^4-1+1}{t^2-1}\right)dt=-\int_0^{1/\sqrt{3}}\left(t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$=-\int_0^{1/\sqrt{3}}\left[\left(t^2+1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]dt$$

$$=-\left[\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)\right]\Bigg|_0^{1/\sqrt{3}}=-\left(\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_0^{1/\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{10}{9\sqrt{3}}.$$

2. Điều kiện: $\begin{cases}2x\ge 0\\6-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le 6.$

Đặt VT của phương trình là f(x), chúng ta đi xét hàm số này trên tập D = [0; 6], ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt[4]{2x}}+\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{6-x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}$$

$$=\underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{6-x}}\right)}_{u(x)}+\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right)}_{v(x)}.$$

Nhận xét rằng:

$$u(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{6-x}}=0\Leftrightarrow\sqrt[4]{2x}=\sqrt[4]{6-x}\Leftrightarrow x=2.$$

$$v(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}=0\Leftrightarrow\sqrt{2x}=\sqrt{6-x}\Leftrightarrow x=2.$$

Từ đó, suy ra:

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

và với đánh giá rằng:

- Khi $x\in[0;2)$ thì u(x), v(x) cùng âm, do đó $f'(x)<0$.
- Khi $x\in(2;6]$ thì u(x), v(x) cùng dương, do đó $f'(x)>0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		2		6
y'		–	0	+	0
y	f(0)	↗	f(2)	↘	f(6)

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm thực phân biệt điều kiện là đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên tập $D = [0; 1)$ tại hai điểm phân biệt, ta được:

$$\text{Max}\{f(0), f(6)\} \le m < f(2) \Leftrightarrow 2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \le m < 3\sqrt{2} + 6.$$

Vậy, với $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \le m < 3\sqrt{2} + 6 - 1 < m < \frac{1}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu V.a.

1. Giả sử Elíp (E) có phương trình: $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ 0 < b < a.$

Ta lần lượt có:

- Hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20 nên:

$$2(2a + 2b) = 20 \Leftrightarrow a + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 - a. \qquad (1)$$

- Tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ nên:

$$\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{5}{9} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Leftrightarrow 4a^2 = 9b^2 \Leftrightarrow 2a = 3b = 3(5 - a)$$

$$\Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow b = 2.$$

Vậy, Elíp (E) có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

2. Đặt:

$$f(x) = (1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k.x^k$$

suy ra: $f\left(\frac{1}{2}\right) = a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n} \Leftrightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12.$

Tới đây, bài toán được chuyển về tìm $k \in \{1, 2, ..., 12\}$ sao cho $a_k = C_{12}^k 2^k$ lớn nhất. Ta xét:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Leftrightarrow \frac{C_{12}^{k+1}.2^{k+1}}{C_{12}^k.2^k} > 1 \Leftrightarrow \frac{2(12 - k)}{k + 1} > 1 \Leftrightarrow k < \frac{23}{3}$$

$$\Rightarrow a_0 < a_1 < ... < a_8 > a_9 > ... > a_{12}$$

Vậy, số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ..., a_n$ là $a_8 = C_{12}^8 2^8 = 126720.$

Câu V.b.

1. Biến đổi phương trình về dạng: $\log_{2x-1}(2x - 1)(x + 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4.$

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < 2x - 1 \neq 1 \\ 0 < x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \neq 1.$ (*)

Biến đổi tiếp phương trình về dạng:

$1 + \log_{2x-1}(x+1) + 2\log_{x+1}(2x-1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \log_{2x-1}(x+1) + 2\log_{x+1}(2x-1)^2 - 3 = 0.$

Đặt $t = \log_{2x-1}(x+1)$, suy ra $\log_{x+1}(2x-1) = \frac{1}{t}$.

Khi đó, phương trình có dạng: $t + \frac{2}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Ta lần lượt:

- Với $t = 1$ thì: $\log_{2x-1}(x+1) = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 2$.
- Với $t = 2$ thì: $\log_{2x-1}(x+1) = 2 \Leftrightarrow x + 1 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 5/4 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 2$ và $x = \frac{5}{4}$.

2. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

a. Tính thể tích của khối chóp A'.ABC.

Gọi H là trung điểm của BC, suy ra A'H ⊥ (ABC) nên:

$$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6}A'H.AB.AC. \quad (1)$$

Trong đó, ta lần lượt có:

$AB = a,\ AC = a\sqrt{3}$. (2)

$$AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a.$$

$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2 \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}.$ (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được $V_{A'.ABC} = \frac{a^3}{2}$.

b. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

Trong ΔA'B'H vuông tại A', ta có:

$B'H^2 = A'B'^2 + A'H^2 = 4a^2 \Rightarrow B'H = 2a \Rightarrow \Delta B'BH$ cân tại B'.

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AA', B'C', suy ra:

$$\alpha = \widehat{B'BH} \text{ và } \cos\alpha = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}.$$

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI B NĂM 2008

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số:

$$y = 4x^3 - 6x^2 + 1. \qquad (1)$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm M(−1; −9).

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x.\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x.\cos x$.
2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu III: (2 điểm): Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho ba điểm A(0; 1; 2), B(2; −2; 1), C(−2; 0; 1).

1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.
2. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng 2x + 2y + z − 3 = 0 sao cho MA = MB = MC.

Câu IV: (2 điểm)

1. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).dx}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)}$.
2. Cho hai số thực x, y thay đổi thoả mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}.$$

PHẦN TỰ CHỌN

Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Chứng minh rằng:

$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{1}{C_n^k}$$

(n nguyên dương, C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử).

2. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, xác định toạ độ đỉnh C của ΔABC, biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm H(−1; −1), đường phân giác trong của góc A có phương trình $x - y + 2 = 0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x + 3y - 1 = 0$.

Câu V.b Theo chương trình THPT phân ban (2 điểm)

1. Giải bất phương trình $\log_{0,7}\left(\log_6 \frac{x^2+x}{x+4}\right) < 0$.

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tính theo a thể tích khối chóp S.BMDN và côsin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Với hàm số:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ với } a \neq 0$$

ta lần lượt có:

a. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

b. Sự biến thiên của hàm số:

- Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} ax^3\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3}\right) = \begin{cases} +\infty \text{ khi } a > 0 \\ -\infty \text{ khi } a < 0 \end{cases}.$$

- Bảng biến thiên:

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$.

Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'			
y			

Dựa vào bảng biến thiên đưa ra kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến và cực trị của hàm số.

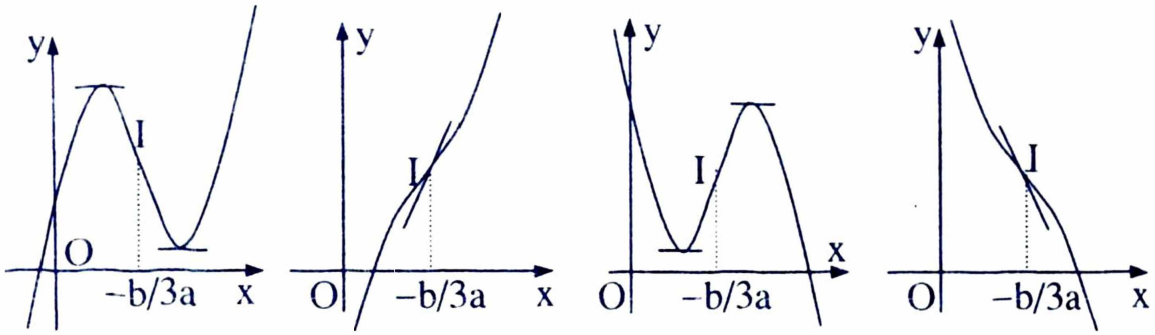
- Điểm uốn:

$$y'' = 6ax + 2b,\ y'' = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}.$$

Vì y'' đổi dấu khi x qua điểm $-\frac{b}{3a}$ nên đồ thị hàm số có một điểm uốn $I\left(-\frac{b}{3a}; f(-\frac{b}{3a})\right)$.

c. Đồ thị: Do có bốn trường hợp khác nhau về chiều biến thiên nên đồ thị của hàm bậc ba có bốn dạng sau đây:

Với a > 0		**Với a < 0**	
Có hai cực trị	Không có cực trị	Có hai cực trị	Không có cực trị



MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ ĐA THỨC BẬC BA

Tính chất 1: Hàm số đồng biến trên **R**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases}.$$

Tính chất 2: Hàm số nghịch biến trên **R**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases}.$$

Tính chất 3: Hàm số có cực đại, cực tiểu

$$\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac > 0.$$

Để tìm giá trị cực trị của hàm số tại điểm x_0 trong trường hợp x_0 là số lẻ, thực hiện phép chia đa thức y cho y' ta được:

$$y = y'.g(x) + h(x).$$

Suy ra:

$$y_0 = y(x_0) = y'(x_0).g(x_0) + h(x_0) = h(x_0).$$

Khi đó, "*Phương trình đường thẳng đi qua cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số có dạng y = h(x)*".

Tính chất 4: Đồ thị nhận điểm uốn U làm tâm đối xứng.

Thật vậy, dời trục bằng tịnh tiến về gốc $U(x_0, y_0)$, trong đó:

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{3a} \\ y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d \end{cases}.$$

theo công thức dời trục là:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}.$$

Thay x, y vào phương trình hàm số ta được:

$$Y + y_0 = a(X + x_0)^3 + b(X + x_0)^2 + c(X + x_0) + d$$

$$\Leftrightarrow Y = aX^3 + g(x_0)X.$$

Hàm số này là hàm lẻ nên đồ thị nhận U làm tâm đối xứng.

Tính chất 5: Tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất nếu $a > 0$ và hệ số góc lớn nhất nếu $a < 0$ trong các tiếp tuyến của đồ thị.

Thật vậy, ta có:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c,$$

suy ra hệ số góc của tiếp tuyến tại $x = x_0$ là:

$$k = y'(x_0) = 3a\,x_0^2 + 2bx_0 + c = 3a\left(x_0 + \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{3ac - b^2}{3a}.$$

- Với $a > 0$, thì $k_{Min} = \dfrac{3ac - b^2}{3a}$ đạt được khi $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$.
- Với $a < 0$, thì $k_{Max} = \dfrac{3ac - b^2}{3a}$ đạt được khi $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$.

Mà $y'' = 6ax + 2b$ nên $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$ chính là hoành độ điểm uốn, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Tính chất 6: Nếu đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm cách đều nhau thì điểm uốn nằm trên trục hoành.

Thật vậy, hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với Ox là nghiệm của phương trình:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \qquad (1)$$

- Đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm A, B, C cách đều nhau

  $\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$ thoả mãn

$$\frac{x_1 + x_3}{2} = x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_3 = 2x_2. \qquad (2)$$

- Mặt khác theo định lí Vi - ét ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}. \qquad (3)$$

- Từ (2) và (3) suy ra

$$x_2 = -\frac{b}{3a} \text{ và vì } f(x_2) = 0 \Leftrightarrow f\left(-\frac{b}{3a}\right) = 0.$$

- Ta có:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c;$$

$$y'' = 6ax + 2b,\ y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a},$$

đó là hoành độ điểm uốn U của đồ thị hàm số, mà $f(-\frac{b}{3a}) = 0$,

suy ra $U(-\frac{b}{3a}, 0) \in Ox$.

☞ ***Chú ý***: Kết quả trên cho ta điều kiện cần để đồ thị hàm bậc ba cắt trục hoành tại ba điểm cách đều nhau (hoặc *"đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng "*). Khi áp dụng điều kiện cần đã nêu trên, ta cần thử lại để có điều kiện cần và đủ.

Tính chất 7: Với phương trình bậc ba:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ với } a \neq 0. \qquad (1)$$

a. Dự đoán nghiệm và phân tích thành nhân tử

- Nếu $a + b + c + d = 0$ thì (1) có nghiệm $x = 1$.
- Nếu $a - b + c - d = 0$ thì (1) có nghiệm $x = -1$.
- Nếu a, b, c, d nguyên và (1) có nghiệm hữu tỷ $\frac{p}{q}$ thì p, q theo thứ tự là ước của d và a.
- Nếu (1) có nghiệm x_0, thì

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_0)(ax^2 + b_1x + c_1) = 0.$$

b. Các phương pháp xác định điều kiện của tham số để phương trình bậc ba có k nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số cắt Ox tại k điểm phân biệt

***Phương pháp 1*: Đại số**

Đoán nghiệm x_0 của (1). Phân tích (1) thành:

$$(x - x_0)(ax^2 + b_1x + c_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + b_1x + c_1 = 0 \ (2) \end{cases}.$$

Vậy, ta thấy:

- (1) có nghiệm duy nhất (khi đó, đồ thị hàm số cắt Ox tại một điểm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2) \text{ vô nghiệm} \\ (2) \text{ có nghiệm kép } x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g < 0 \\ \begin{cases} \Delta_g = 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases} \end{cases}.$$

- (1) có đúng hai nghiệm phân biệt (khi đó, đồ thị hàm số tiếp xúc với Ox)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2) \text{ có nghiệm kép khác } x_0 \\ (2) \text{ có hai nghiệm và một nghiệm là } x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta_g = 0\\ g(x_0) \neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\Delta_g > 0\\ g(x_0) = 0\end{cases}\end{array}\right.$$

- (1) có ba nghiệm phân biệt (khi đó, đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm phân biệt)

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_g > 0\\ g(x_0) \neq 0\end{cases}.$$

***Phương pháp 2*: Hàm số dạng I**

Biến đổi (1) về dạng:

$g(x) = h(m)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$.

Dựa vào bảng biến thiên biện luận vị trí tương đối của đường thẳng $y = h(m)$ với đồ thị hàm số $y = g(x)$.

***Phương pháp 3*: Hàm số dạng II**

Xét hàm số (C): $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

- (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (C) cắt Ox tại một điểm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{Hàm số luôn đơn điệu}\\ \text{Hàm số có CĐ, CT thoả mãn } y_{CĐ}.y_{CT} > 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta_{y'} \leq 0\\ \begin{cases}\Delta_{y'} > 0\\ y_{CĐ}.y_{CT} > 0\end{cases}\end{array}\right.$$

- (1) có đúng hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (C) cắt Ox tại hai điểm ((C) tiếp xúc với Ox)

$\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{CĐ}.y_{CT} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y' = 0 \text{ có 2 nghiệm } x_1, x_2 \text{ phân biệt}\\ y(x_1).y(x_2) = 0\end{cases}.$$

- (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (C) cắt Ox tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{CĐ}.y_{CT} < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y' = 0 \text{ có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ phân biệt}\\ y(x_1).y(x_2) < 0\end{cases}.$$

2. Với yêu cầu "*Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số* (C): $y = f(x)$ *đi qua điểm* $A(x_A, y_A)$ ", ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử hoành độ tiếp điểm là $x = x_0$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d):\ y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0). \qquad (1)$$

Bước 2: Điểm $A(x_A; y_A) \in (d)$

$$\Leftrightarrow y_A = y'(x_0)(x_A - x_0) + y(x_0) \Rightarrow x_0 \Rightarrow \text{tiếp tuyến.}$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phương trình (d) đi qua $A(x_A; y_A)$ có dạng:

$$(d):\ y = k(x - x_A) + y_A.$$

Bước 2: (d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} \Rightarrow k \Rightarrow \text{tiếp tuyến.}$$

Câu II.

1. Chúng ta có thể lựa chọn một trong hai hướng đánh giá sau:

Hướng 1: Dựa vào phương pháp luận hệ số, chúng ta sẽ chia các toán tử trong phương trình thành hai phần, cụ thể:

$$\left(\sqrt{3}\cos^3 x - \sqrt{3}\sin^2 x.\cos x\right) + \left(\sin x.\cos^2 x - \sin^3 x\right) = 0.$$

Tới đây, bằng việc đặt nhân tử chung cho mỗi nhóm, cụ thể:

$$\sqrt{3}\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0,$$

chúng ta thấy xuất hiện nhân tử chung cho cả phương trình là $(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x$, ta được:

$$\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right)\cos 2x = 0.$$

Cách đánh giá trên, khẳng định rằng phương trình sẽ được chuyển về dạng tích để giải.

Hướng 2: Dễ thấy các toán tử trong phương trình để có bậc ba đối với sinx và cosx, do đó nó được tổng quát:

$$a.\sin^3 x + b.\sin^2 x.\cos x + c.\sin x.\cos^2 x + d.\cos^3 x = 0. \qquad (1)$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$a = 0.$$

- Nếu $a = 0$, thì (1) nhận $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.
- Nếu $a \neq 0$, thì (1) không nhận $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Bước 2: Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 x \neq 0$, ta được

$$a.\tan^3 x + b.\tan^2 x + c.\tan x + d = 0$$

Đặt $t = \tan x$, phương trình có dạng:

$$a.t^3 + b.t^2 + c.t + d = 0 \qquad (2)$$

Bước 3: Giải phương trình (2) theo t.

☞ **Mở rộng**: Phương pháp giải trên được mở rộng cho phương trình đẳng cấp bậc n đối với sin và cos, đó là phương trình có dạng:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sin^{n-k} x.\cos^k x = 0.$$

Tuy nhiên để linh hoạt, các em học sinh cần nhớ rằng vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên với các nhân tử có bậc k cũng được coi là có bậc k + 2l, do vậy chúng ta có dạng mở rộng của phương trình thuần nhất bậc ba như sau:

$$a.\sin^3 x + b.\sin^2 x.\cos x + c.\sin x.\cos^2 x + d.\cos^3 x + (e.\sin x + f.\cos x) = 0$$

và phương trình thuần nhất bậc bốn:

$$a.\sin^4 x + b.\sin^3 x.\cos x + c.\sin^2 x.\cos^2 x + d.\sin x.\cos^3 x + e.\cos^4 x + f_1.\sin^2 x + f_2.\cos^2 x + g = 0.$$

2. Đây là hệ phương trình không mẫu mực, do vậy để giải nó chúng ta cần có những đánh giá như sau:
   - Từ phương trình thứ hai của hệ chúng ta nhận thấy có thể biểu diễn:
   $$xy = -\frac{x^2}{2} + 3x + 3. \qquad (1)$$
   - Từ phương trình thứ nhất của hệ chúng ta nhận thấy có thể biến đổi nó về dạng:
   $$(x^2 + xy)^2 = 2x + 9. \qquad (2)$$
   - Từ đó, bằng cách thế (1) vào (2) chúng ta sẽ nhận được phương trình với ẩn x, cụ thể:
   $$\left(x^2 - \frac{x^2}{2} + 3x + 3\right)^2 = 2x + 9 \Rightarrow \text{Giá trị của x} \Rightarrow \text{Giá trị của y}.$$

Như vậy, chỉ cần sử dụng phương pháp thế chúng ta sẽ giải được hệ trên.

Câu III.

1. Để viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm không thẳng hàng M, N, P chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

   Cách 1: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

   $$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{MN} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{MP} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right].$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}.$$

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0. \quad (1)$$

Vì M, N, P thuộc mặt phẳng (P) nên ta có hệ ba phương trình với bốn ẩn A, B, C, D.

Biểu diễn ba ẩn theo một ẩn còn lại, rồi thay vào (1) chúng ta nhận được phương trình mặt phẳng (P).

2. Yêu cầu của bài toán được tổng quát hoá "*Tìm điểm* M *thuộc mặt phẳng* (P) *thoả mãn điều kiện* K", ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình ban đầu của mặt phẳng.

Cách 2: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó:

$$(P) \cap (L) = \{M\}.$$

Chúng thường gặp:

1. Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của điểm A lên mặt phẳng (P).

Khi đó:

- Nếu sử dụng cách 1 thì:

Bước 1: Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Giả sử H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của A lên (P), suy ra:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ AH \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{AH} // \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ của H.}$$

- Nếu sử dụng cách 2 thì:

Bước 1: Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtcp } \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình tham số (d).}$$

Bước 3: Hình chiếu vuông góc H của A lên (P) chính là giao điểm của (d) và (P).

Từ việc xác định được toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên (P), chúng ta thực hiện được việc:

- Tìm toạ độ điểm H thuộc (P) sao cho độ dài AH ngắn nhất.
- Tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua (P), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên (P).

Bước 2: Suy ra toạ độ điểm A_1 từ điều kiện H là trung điểm của AA_1.

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Giả sử $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\dfrac{x+x_A}{2};\dfrac{y+y_A}{2};\dfrac{z+z_A}{2}\right)\in(P) \\ \overrightarrow{AA_1}\,//\,\vec{n}=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ } A_1.$$

- Tìm trên mặt phẳng (P) điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ sao cho $x_M^2+y_M^2+z_M^2$ nhỏ nhất bởi nó được phát biểu lại dưới dạng "*Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc* M *của* O *trên* (P)").

- Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Tìm trên (P) điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi I là trung điểm của AB, suy ra toạ độ của I.

Bước 2: Nhận xét rằng:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|2\overrightarrow{MI}\right|=2MI.$$

Từ đó:

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Bước 3: Xác định toạ độ điểm M.

Mở rộng với ba điểm A, B, C không thẳng hàng (hoặc tứ diện ABCD) chúng ta sử dụng trọng tâm G của ΔABC (hoặc trọng tâm G của tứ diện ABCD). Cụ thể "*Cho ba điểm* A, B, C *không thẳng hàng và mặt phẳng* (P). *Tìm toạ độ điểm* M *trên* (O) *để*:

a. $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

b. $MA^2+MB^2+MC^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

- Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (P), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên (P).

Bước 2: Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) được xác định bởi:

$$(S):\begin{cases}\text{Tâm A}\\ \text{Bán kính R=AH}\end{cases}.$$

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) thì ta có:

$$R = d(A, (P)).$$

Bước 2: Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R} \end{cases}.$$

- Viết phương trình mặt cầu tâm A và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên (P). Ta có H là tâm đường tròn (C).

Bước 2: Mặt cầu (S) cần dựng được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính } R=\sqrt{AH^2 + r^2} \end{cases}.$$

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (P) (khi đó M là tâm đường tròn (C)) và R là bán kính mặt cầu (S) cần dựng thì ta có:

$$R=\sqrt{AH^2 + EH^2} = \sqrt{d^2(A, (P)) + r^2}.$$

Bước 2: Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R} \end{cases}.$$

2. Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho:

a. $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

b. MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Với yêu cầu của bài toán ở đây là " Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho MA = MB = MC ", chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Để MA = MB = MC thì M thuộc trục đường tròn (d) của ΔABC (là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC)).

Bước 2: Nhận xét rằng:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A}$$

Suy ra, trung điểm I của BC là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bước 3: Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua I} \\ (d) \perp (ABC) \end{cases}.$$

Bước 4: Từ đó, suy ra toạ độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(d)\\(P)\end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ M.}$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử M(x; y; z), khi đó bằng việc thiết lập điều kiện M $\in$ (P) và MA = MB = MC chúng ta sẽ nhận được một hệ ba phương trình với ba ẩn x, y, z. (I)

Bước 2: Giải hệ (I), từ đó kết luận toạ độ điểm M.

Câu IV.

1. Ta nhận xét:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).dx = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x).dx$$

từ đó, để đại số hoá tích phân này chúng ta cần biến đổi mẫu số về dạng:

f(cosx + sinx) để phép đổi biến t = cosx + sinx,

hoặc f(cosx + sinx + c) để phép đổi biến t = cosx + sinx + c.

Từ nhận định trên, ta đi biến đổi mẫu số như sau:

$$MS = (1+\sin 2x)+2(\sin x+\cos x)+1$$

$$= (\sin x+\cos x)^2+2(\sin x+\cos x)+1 = (\text{sinx} + \text{cosx} + 1)^2.$$

Tức là I sẽ được biến đổi về dạng:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{(\sin x-\cos x).dx}{(\sin x+\cos x+1)^2}.$$

Tới đây, các em học sinh hãy sử dụng phép đổi biến t = sinx + cosx + 1 hoặc t = sinx + cosx để tính tiếp.

2. Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến có điều kiện $x^2 + y^2 = 1$, nên A có thể được chuyển về dạng đẳng cấp như sau:

$$A = \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2} = \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+2xy+3y^2}. \qquad (*)$$

Nhận xét rằng:

- Với y = 0 thì $x^2 = 1$, suy ra A = 2.
- Với y ≠ 0 thì bằng việc sử dụng ẩn phụ x = ty chúng ta sẽ chuyển được (*) về dạng tam thức bậc hai theo ẩn t với tham số A, cụ thể:

$$(A-2)t^2 + 2(A-6)t + 3A = 0. \qquad (**)$$

Tới đây bằng việc tìm điều kiện của A để (**) có nghiệm t chúng ta sẽ nhận được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của A.

Câu V.a.

1. Chỉ cần sử dụng đúng công thức biến đổi:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

là các em có thể chứng minh được công thức đã cho.

2. Kí hiệu:

- Đường phân giác trong của góc A là (d_1), có vtcp $\overrightarrow{u_1}$.
- Đường cao kẻ từ B là (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}$.

Trước tiên, các em học sinh hãy phác thảo hình vẽ ra nháp để theo dõi định hướng sau:

- Vì các đường thẳng AC, BC, HC đồng quy tại C. Suy ra, để có được toạ độ điểm C chúng ta cần có được phương trình của hai trong ba đường thẳng AC, BC, HC.

  Và dễ thấy các đường thẳng chỉ được xác định bằng việc chỉ ra điểm mà nó đi qua cùng với phương (vtcp hoặc vtpt). Nhận định này dẫn tới việc loại bỏ việc xác định đường thẳng BC.
- *Với đường thẳng* AC chúng ta đã có sẵn phương vì $AC \perp (d_2)$, như vậy cần tìm một điểm thuộc AC. Điều này thực hiện được dựa vào tính chất đối xứng của đường phân giác trong đỉnh A (là (d_1)), cụ thể đi xác định điểm H' là điểm đối xứng với H qua (d_1).

  Từ đó, phương trình đường thẳng AC được cho bởi:

$$(AC): \begin{cases} \text{Qua } H' \\ (AC) \perp (d_2) \end{cases}.$$

- *Với đường thẳng* CH, do đã có toạ độ của H nên chúng ta cần tìm phương của nó và vì:

$$CH \perp AH \Rightarrow \text{Cần tìm toạ độ của A.}$$

Dễ thấy $(AC) \cap (d_1) = \{A\}$ nên toạ độ của A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (AC) \\ (d_1) \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ của A.}$$

Phương trình đường thẳng CH được cho bởi:

$$(CH): \begin{cases} \text{Qua } H \\ \text{vtpt } \overrightarrow{HA} \end{cases}.$$

- Cuối cùng, vì $(AC) \cap (CH) = \{C\}$ nên toạ độ của C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (AC) \\ (HC) \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ của C.}$$

Câu V.b.

1. Bằng các phép biến đổi tương đương các em học sinh có thể giải ngay được bất phương trình này, với lưu ý về tính đơn điệu của hàm số lôgarit tứng ứng với cơ số lớn hơn 1 hoặc nhỏ hơn 1.

2. Công việc:
   - Tính thể tích khối chóp S.BMDN hoàn toàn được thực hiện khi có được đường cao SH (với H là hình chiếu vuông góc của S trên AB).
   - Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN hoàn toàn được thực hiện bằng việc kẻ ME // DN (với E ∈ AD), từ đó suy ra:

     $g(SM, DN) = \widehat{SME}$.

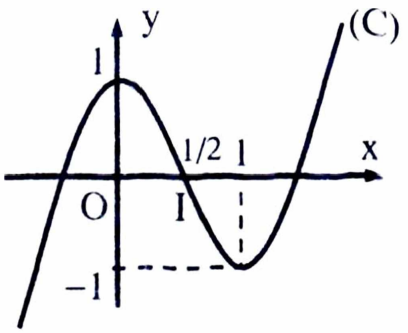
ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI B NĂM 2008

Câu I.

1. Ta lần lượt có:
   a. Hàm số xác định trên D = $\mathbb{R}$.
   b. Sự biến thiên của hàm số:
      - Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(4-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$= \begin{cases} +\infty \text{ khi } x \to +\infty \\ -\infty \text{ khi } x \to -\infty \end{cases}.$$



      - Bảng biến thiên:

$y' = 12x^2 - 12x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1 CĐ	↘	CT −1	↗	$+\infty$

      - Điểm uốn:

        $y'' = 24x - 12$, $y'' = 0 \Leftrightarrow 24x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$.

        Vì y'' đổi dấu khi x qua điểm 1/2 nên đồ thị hàm số có một điểm uốn là I(1/2; 0).

   c. Đồ thị của hàm số.

2. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1. Giả sử hoành độ tiếp điểm là $x = x_0$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

(d): $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

$\Leftrightarrow$ (d): $y = (12x_0^2 - 12x_0)(x - x_0) + 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1.$ (1)

Điểm $M(-1; -9) \in (d)$, suy ra:

$-9 = (12x_0^2 - 12x_0)(-1 - x_0) + 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1$

$\Leftrightarrow (x_0 + 1)^2(4x_0 - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 5/4 \end{array}\right.$.

Ta lần lượt:

- Với $x_0 = -1$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_1): $y = 24x + 15$.
- Với $x_0 = \frac{5}{4}$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_2): $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$.

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) của đồ thị thoả mãn điều kiện.

Cách 2: Phương trình đường thẳng (d) qua $M(-1; -9)$ với hệ số góc k, có dạng:

$y = k(x + 1) - 9.$ (1)

Đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 4x^3 - 6x^2 + 1 = k(x + 1) - 9 \\ 12x^2 - 12x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2(4x - 5) = 0 \\ 12x^2 - 12x = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \end{array}\right. \\ 12x^2 - 12x = k \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 24 \\ k = \frac{15}{4}. \end{array}\right.$$

Ta lần lượt:

- Với $k = 24$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_1): $y = 24x + 15$.
- Với $k = \frac{15}{4}$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_2): $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$.

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) của đồ thị thoả mãn điều kiện.

Câu II.

1. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$\sqrt{3}\cos^3 x - \sqrt{3}\sin^2 x.\cos x + \sin x.\cos^2 x - \sin^3 x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right)\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}\cos x + \sin x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -\sqrt{3} \\ \cos 2x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Vì cosx = 0 không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x \neq 0$, ta được:

$$\tan^3 x - \sqrt{3} = \tan x - \sqrt{3}\tan^2 x.$$

Đặt t = tanx, ta được:

$$t^3 + \sqrt{3}t^2 - t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow t(t^2 - 1) + \sqrt{3}(t^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 1)\left(t + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pm 1 \\ t = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \pm 1 \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

2. Hệ phương trình được biến đổi tương đương về dạng:

$$\left\{\begin{array}{l} (x^2 + xy)^2 = 2x + 9 \\ xy = -\dfrac{x^2}{2} + 3x + 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left(x^2 - \frac{x^2}{2} + 3x + 3\right)^2 = 2x + 9$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 64x = 0 \Leftrightarrow x(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array}\right.$$

Ta lần lượt:

- Với x = 0, thì:

  $0.y = 3$, vô nghiệm.

- Với x = –4, thì:

  $$-4y = -8 + 3(-4) + 3 \Leftrightarrow y = \frac{17}{4}.$$

Vậy, hệ có nghiệm $\left(-4; \frac{17}{4}\right)$.

Câu III.

1. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Mặt phẳng (Q) đi qua ba điểm A, B, C được cho bởi:

$$(Q): \left\{\begin{array}{l} \text{Qua A} \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \end{array}\right. \Leftrightarrow (Q): \left\{\begin{array}{l} \text{Qua A}(0;1;2) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2;4;-8) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ (Q): x + 2y – 4z + 6 = 0.

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (Q) có phương trình:

(Q): Ax + By + Cz + D = 0 với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Vì A, B, C thuộc (P), ta được:

$$\begin{cases} B + 2C + D = 0 \\ 2A - 2B + C + D = 0 \\ -2A + C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2A \\ C = -4A \\ D = 6A \end{cases}.$$

Từ đó ta được:

(Q): $Ax + 2Ay - 4Az + 6A \Leftrightarrow$ (Q): $x + 2y - 4z + 6 = 0$.

2. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Để MA = MB = MC thì M thuộc trục đường tròn (d) của ΔABC (là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC)).

Nhận xét rằng:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

$\Rightarrow$ Trung điểm I(0 ; −1; 1) của BC là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Từ đó, suy ra M thuộc đường thẳng (d) thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua I} \\ (d) \perp (Q) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua I}(0;-1;1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;2;-4) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Từ đó, suy ra toạ độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 4t \\ 2x + 2y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 4t \\ 2t + 2(2t - 1) + (1 - 4t) - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -7 \end{cases}.$$

Vậy, với điểm M(2; 3; −7) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Giả sử M(x; y; z), để M thuộc mặt phẳng (P): $2x + 2y + z - 3 = 0$ sao cho MA = MB = MC điều kiện là:

$$\begin{cases} M \in (P) \\ MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z - 3 = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -7 \end{cases} \Rightarrow M(2; 3; -7).$$

Vậy, với điểm M(2; 3; −7) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu IV.

1. Viết lại I dưới dạng:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x - \cos x).dx}{(1+\sin 2x)+2(\sin x+\cos x)+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x - \cos x).dx}{(\sin x+\cos x)^2+2(\sin x+\cos x)+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x - \cos x).dx}{(\sin x+\cos x+1)^2}.$$

Đặt t = sinx + cosx + 1, suy ra:

dt = (cosx – sinx)dx ⇔ (sinx – cosx)dx = –dt.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 2.
- Với $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = \sqrt{2}+1$.

Khi đó:

$$I = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int_2^{\sqrt{2}+1} \frac{dt}{t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2t}\Big|_2^{\sqrt{2}+1} = \frac{4-3\sqrt{2}}{4}.$$

2. Biến đổi A về dạng:

$$A = \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2} = \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+2xy+3y^2}.$$

Nhận xét rằng:

- Với y = 0 thì $x^2 = 1$, suy ra A = 2.
- Với y ≠ 0 thì ta có biến đổi tiếp cho A bằng cách chia cả TS và MS cho y^2:

$$A = \frac{2\left(\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y}\right)}{\frac{x^2}{y^2}+2\frac{x}{y}+3}.$$

Đặt x = ty, ta được:

$$A = \frac{2(t^2+6t)}{t^2+2t+3} \Leftrightarrow (A-2)t^2 + 2(A-6)t + 3A = 0. \quad (*)$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với A = 2 thì (*) có nghiệm $t = \frac{3}{4}$.

Trường hợp 2: Với $A \neq 2$ thì (*) có nghiệm khi:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (A-6)^2 - 3A(A-2) \geq 0 \Leftrightarrow A^2 + 3A - 18 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -6 \leq A \leq 3.$$

Vậy, ta có kết luận:

$A_{Min} = -6$, đạt được khi:

$$t = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = -\frac{3}{2}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{4}y^2 + y^2 = 1 \\ x = -\frac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{4}{13} \\ x = -\frac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{\sqrt{13}} \ \& \ y = \frac{2}{\sqrt{13}} \\ x = \frac{3}{\sqrt{13}} \ \& \ y = -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{array}\right.$$

$A_{Max} = 3$, đạt được khi:

$$t = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 + y^2 = 1 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{1}{10} \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{\sqrt{10}} \ \& \ y = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ x = -\frac{3}{\sqrt{10}} \ \& \ y = -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$$

Câu V.a.

1. Ta có:

$$VT = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{k!(n+1-k)!}{(n+1)!} + \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2}.\frac{k!(n-k)!}{n!}(n+1-k+k+1) = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{C_n^k}, \text{ đpcm.}$$

2. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

Kí hiệu:

- Đường phân giác trong của góc A là (d_1), có vtcp $\overrightarrow{u_1}(1;1)$.
- Đường cao kẻ từ B là (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(3;-4)$.

Gọi H'(a; b) là điểm đối xứng của H qua (d_1) thì H' thuộc AC. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{HH'} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \text{Trung điểm I của HH' thuộc } (d_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1.(a+1)+1.(b+1)=0 \\ \dfrac{a-1}{2}-\dfrac{b-1}{2}+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow H'(-3;\ 1).$$

Phương trình đường thẳng AC được cho bởi:

$$(AC): \begin{cases} \text{Qua } H' \\ (AC) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow (AC): \begin{cases} \text{Qua } H'(-3;\ 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_2}(3;\ -4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (AC):\ 3x - 4y + 13 = 0.$$

Vì $(AC) \cap (d_1) = \{A\}$ nên toạ độ của A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x-4y+13=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow A(5;\ 7).$$

Phương trình đường thẳng CH được cho bởi:

$$(CH): \begin{cases} \text{Qua } H \\ CH \perp HA \end{cases} \Leftrightarrow (CH): \begin{cases} \text{Qua } H(-1;\ -1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{HA}(6;\ 8) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (CH):\ 3x + 4y + 7 = 0.$$

Vì $(AC) \cap (CH) = \{C\}$ nên toạ độ của C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x-4y+13=0 \\ 3x+4y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-10/3 \\ y=3/4 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{10}{3};\ \frac{3}{4}\right).$$

Câu V.b.

1. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$\log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4} > 6 \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4} - 6 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x-24}{x+4} > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 < x < -3 \\ x > 8 \end{bmatrix}.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là tập $(-4;\ -3) \cup (8;\ +\infty)$.

☞ ***Chú ý***: Một số em học sinh mắc phải sai lầm khi giải (*) bằng cách nhân chéo hai vế. Hãy nhớ rằng điều đó chỉ có thể được thực hiện khi MS luôn âm hoặc luôn dương.

2. *Bạn đọc tự giải.*

a. $V_{S.BMDN} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

b. Côsin của góc giữa hai đường thẳng SM, ND bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI D NĂM 2008

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4. \qquad (1)$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).
2. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua điểm I(1; 2) với hệ số góc k ($k > -3$) đều cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt I, A, B đồng thời I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$.
2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu III: (2 điểm): Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho bốn điểm A(3; 3; 0), B(3; 0; 3), C(0; 3; 3), D(3; 3; 3).

1. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.
2. Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Câu IV: (2 điểm)

1. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x.dx}{x^3}$.
2. Cho hai số thực x, y không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{(x-1)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}.$$

PHẦN TỰ CHỌN

Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Tìm số nguyên n thoả mãn hệ thức:

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} = 2048.$$

(n nguyên dương, C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử).

2. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho parabol (P): $y^2 = 16x$ và điểm A(1; 4). Hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho $\widehat{BAC} = 90^0$. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Câu V.b Theo chương trình THPT phân ban (2 điểm)

1. Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq 0.$

2. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông AB = AC = a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Tham khảo định hướng trong câu I.1 của đề toán khối B – 2008.
2. Đây là bài toán tương giao với yêu cầu thêm chỉ ra tính chất của giao điểm, và chúng ta thực hiện nó theo các bước:

   Bước 1: Viết phương trình đường thẳng (d) qua I với hệ số góc k.

   Bước 2: Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm của (d) với đồ thị (1), rồi phân tích nó thành:

   $$(x - 1)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ g(x) = 0 \quad (*) \end{bmatrix}$$

   Bước 3: Sử dụng điều kiện $k > -3$ để chứng minh (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1, cụ thể chứng minh:

   $$\begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases}.$$

   Bước 4: Vậy, mọi đường thẳng (d) đều cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt I(1; 2), $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thoả mãn:

   $$x_1 + x_2 = 2x_I \Leftrightarrow \text{I là trung điểm của AB.}$$

Câu II.

1. Chúng ta đi đánh giá lần lượt:

   $$VT = 4\sin x.\cos^2 x + \sin 2x = (2\cos x + 1)\sin 2x = VP.\sin 2x$$

   Từ đó, suy ra phương trình được giải bằng cách chuyển về dạng tích.

2. Nhận xét rằng hệ được cho dưới dạng không mẫu mực và có chứa căn hỗn hợp nên rất khó để khử căn thức bằng các phép bình phương. Trong khi đó, phương trình thứ nhất của hệ lại không chứa căn, dẫn tới nhận định cần sử dụng phương pháp thế để giải hệ. Và để đi theo hướng này thì với phương trình:

   $$xy + x + y = x^2 - 2y^2 \qquad (*)$$

   chúng ta chỉ có thể:

   - Rút x hoặc y từ (*), điều này không thể bởi x cũng như y đều có bậc hai và bậc nhất.
   - Phân tích đa thức thành nhân tử, cụ thể (*) sẽ được biến đổi thành:

     $$(x + y)(x - 2y - 1) = 0. \qquad (1)$$

Tới đây, dựa vào điều kiện có nghĩa của hệ ($x \geq 1$, $y \geq 0$), ta suy ra:

$$x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1. \qquad (**)$$

Công việc còn lại chỉ là thay (**) vào phương trình thứ hai của hệ.

☞ ***Chú ý***: Để có phân tích như (1) các em học sinh cũng có thể sử dụng kiến thức tam thức bậc hai bằng cách coi đó là phương trình bậc hai theo x hoặc theo y, để rồi đi tính Δ.

Câu III.

1. Để lập phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \qquad (*)$$

điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$.

Bước 2: Điểm A, B, C, D $\in$ (S), ta được hệ (I) gồm 4 phương trình với 4 ẩn a, b, c, d.

Bước 3: Giải hệ (I), nhận được a, b, c, d rồi thay vào (*) để có (S).

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c), khi đó ta có điều kiện:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ tâm I.}$$

Bước 2: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I} \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

☞ ***Chú ý***: Ngoài hai cách giải trên, để lập phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D (ngoại tiếp tứ diện ABCD) chúng ta còn có thể tận dụng được tính chất của tứ diện ABCD để nhận được lời giải đơn giản hơn, cụ thể:

Trường hợp 1: Nếu DA = DB = DC thì:

Bước 1: Xác định tâm I bằng cách:

- Dựng đường cao DH$\perp$(ABC).
- Dựng mặt phẳng trung trực (P) của DA.
- Khi đó $\{I\} = (DH) \cap (P)$.

Bước 2: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I} \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Nếu DA⊥(ABC) thì:

Bước 1: Xác định tâm I bằng cách:

- Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
- Dựng đường thẳng (d) qua K và song song với DA (hoặc (d) ⊥ (ABC).
- Dựng mặt phẳng trung trực (P) của DA.
- Khi đó {I} = (d) ∩ (P).

Bước 2: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S):\begin{cases}\text{Tâm I}\\ \text{Bán kính } R = IA\end{cases}.$$

Trường hợp 3: Nếu $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \frac{\pi}{2}$ thì mặt cầu ngoại tiếp DABC có tâm I là trung điểm AB và bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

Trường hợp 4: Nếu AD và BC có đoạn trung trực chung EF thì:

Bước 1: Ta lần lượt:

- Lập phương trình tham số của đường thẳng (EF) theo t.
- Khi đó, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm $I \in EF$ (thỏa mãn phương trình tham số của EF).
- Từ điều kiện $IA^2 = IC^2 = R^2$ suy ra giá trị tham số t, từ đó nhận được tọa độ tâm I.

Bước 2: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S):\begin{cases}\text{Tâm I}\\ \text{Bán kính } R = IA\end{cases}.$$

2. Mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C nên sẽ cắt (ABC) theo giao tuyến chính là đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC, để xác định toạ độ tâm H và bán kính r của đường tròn (C), ta lần lượt có:

   a. Bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.

   b. Tâm H là hình chiếu vuông góc của I trên (ABC) nên để có được toạ độ của H chúng ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (ABC), cụ thể:

$$(ABC):\begin{cases}\text{Qua A}\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\end{cases} \Leftrightarrow (ABC):\begin{cases}\text{Qua A}\\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\end{cases}.$$

   Bước 2: Viết phương trình tham số (giả sử theo t) của đường thẳng (d) qua I và vuông góc với (ABC), tức:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua I}\\ \text{vtcp } \vec{n}\end{cases}.$$

Bước 3: Thay phương trình của (d) vào (ABC), ta được:

$$f(t) = 0 \Rightarrow \text{Giá trị } t \Rightarrow \text{Toạ độ điểm H.}$$

Bước 4: Kết luận.

Câu IV.

1. Đây là tích phân được mở rộng từ dạng $I = \int_a^b f(x).\ln^n x.dx$ phương pháp được lựa chọn là "*Phương pháp tích phân từng phần*" với cách lựa chọn:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{1}{x^3}.dx \end{cases}.$$

2. Sử dụng đánh giá:

$$|A| = \left|\frac{(x-1)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}\right| \le \frac{(x+y)(1+xy)}{\left[(x+y)+(1+xy)\right]^2} \le \frac{1}{4}.$$

Câu V.a.

1. Sử dụng khai triển:

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k.x^k$$

rồi lấy tương ứng $x = 1$ và $x = -1$, chúng ta sẽ nhận được:

$$2^{n-1} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} \Rightarrow \text{Giá trị của n.}$$

2. Để thực hiện bài toán này chúng ta chỉ cần làm theo các bước:

Bước 1: Hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P), suy ra:

$$B\left(\frac{b^2}{16}; b\right),\ C\left(\frac{c^2}{16}; c\right), \text{ với } b \ne 4 \text{ và } c \ne 4.$$

Bước 2: Ta lần lượt:

- Phương trình đường thẳng (BC) được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{Qua B} \\ \text{Qua C} \end{cases}. \qquad (1)$$

- Từ điều kiện $\widehat{BAC} = 90^0$, suy ra:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \qquad (2)$$

Bước 3: Từ (1) và (2) suy ra đường thẳng (BC) luôn đi qua điểm cố định I.

Câu V.b.

1. Bằng các phép biến đổi tương đương các em học sinh có thể giải ngay được bất phương trình này, với lưu ý về tính đơn điệu của hàm số lôgarit tương ứng với cơ số lớn hơn 1 hoặc nhỏ hơn 1.

2. Công việc:
   - Chứng minh MN vuông góc với BD sẽ được rút ra từ nhận xét rằng MN // (P) và BD ⊥ (P).
   - Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC sẽ được thực hiện bằng việc chọn một mặt phẳng chứa AC và song song với MN.

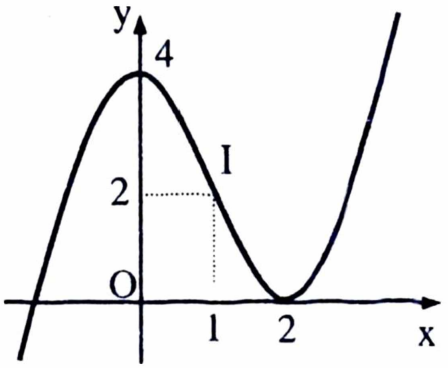
ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI D NĂM 2008

Câu I.

1. Ta lần lượt có:
   a. Hàm số xác định trên D = $\mathbb{R}$.
   b. Sự biến thiên của hàm số:
      - Giới hạn của hàm số tại vô cực:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} [x^3(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3})]$$

$$= \begin{cases} +\infty \text{ khi } x \to +\infty \\ -\infty \text{ khi } x \to -\infty \end{cases}.$$



      - Bảng biến thiên:

$$y' = 3x^2 - 6x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ 4	↘	CT 0	↗	$+\infty$

      - Điểm uốn:

$$y'' = 6x - 6, \quad y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vì y'' đổi dấu khi x qua điểm −1 nên đồ thị hàm số có 1 điểm uốn là I(1; 2).

2. Đường thẳng (d) đi qua điểm I(1; 2) với hệ số góc k (k > −3), có phương trình:

(d): y = k(x − 1) + 2 ⇔ (d): y = kx − k + 2.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đồ thị hàm số (1) là nghiệm phương trình:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = kx - k + 2 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - k - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 - 2x - k - 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Vậy, khi k thay đổi (k > −3), thì (d) luôn cắt đồ thị (C) tại một điểm I(1; 2) cố định, và vì k > −3 nên:

$$\begin{cases}\Delta'_g = k+3>0\\ g(1) = -k-3\neq 0\end{cases} \Rightarrow (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác 1.}$$

Vậy, mọi đường thẳng (d) đều cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt I(1; 2), $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thoả mãn:

$x_1 + x_2 = 2 = 2x_1 \Leftrightarrow$ I là trung điểm của AB.

☞ ***Chú ý***: Nếu sử dụng nhận định I là tâm đối xứng của đồ thị (1) thì chúng ta cũng suy ra được nó là trung điểm của AB.

Câu II.

1. Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\sin x.\cos^2 x + \sin 2x = 1 + 2\cos x \Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x.\cos x - 1) + \sin 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin 2x - 1) + \sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -\dfrac{1}{2}\\ \sin 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

2. Điều kiện:

$$\begin{cases}x - 1 \geq 0\\ 2y \geq 0\end{cases} \begin{cases}x \geq 1\\ y \geq 0\end{cases} \quad (*)$$

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ về dạng:

$$(x + y)(x - 2y - 1) = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1. \quad (**)$$

Thay (**) vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$(2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y+1-1} = 2(2y+1) - 2y$$

$$\Leftrightarrow (y+1)\sqrt{2y} = 2(y+1) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \sqrt{2y} = 2 \Leftrightarrow 2y = 4 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 5.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm (5 ; 2).

Câu III.

1. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1 Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$.

Điểm A, B, C, D $\in$ (S), ta được:

$$\begin{cases}6a + 6b - d = 18\\ 6a + 6c - d = 18\\ 6b + 6c - d = 18\\ 6a + 6b + 6c - d = 27\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = b = c = \dfrac{3}{2}\\ d = 0\end{cases}, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z = 0$.

Cách 2: Giả sử mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c), khi đó ta có điều kiện:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 + (b-3)^2 + c^2 = (a-3)^2 + b^2 + (c-3)^2 \\ (a-3)^2 + (b-3)^2 + c^2 = a^2 + (b-3)^2 + (c-3)^2 \\ (a-3)^2 + (b-3)^2 + c^2 = (a-3)^2 + (b-3)^2 + (c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = c \\ c = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{3}{2} \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right) \\ \text{Bán kính } R = IA = \sqrt{\dfrac{27}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}.$$

2. Mặt phẳng (Q) đi qua ba điểm A, B, C được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{Qua } A(3;3;0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-9;-9;-9), \text{ chọn } \vec{n}(1;1;1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (Q): x + y + z - 6 = 0.$

Đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có tâm H là hình chiếu vuông góc của I lên (Q).

- Gọi (d) là đường thẳng qua I và vuông góc với (Q), ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } I\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 3/2 + t \\ y = 3/2 + t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 3/2 + t \end{cases}$$

- Bằng cách thay phương trình của (d) vào (Q), ta được:

$$\left(\frac{3}{2} + t\right) + \left(\frac{3}{2} + t\right) + \left(\frac{3}{2} + t\right) - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow H(2; 2; 2).$$

Vậy, đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm H(2; 2; 2).

Câu IV.

1. Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{1}{x^3}.dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = -\dfrac{1}{2x^2} \end{cases}.$$

Khi đó: $I = -\dfrac{1}{2x^2}.\ln x\Big|_1^2 + \dfrac{1}{2}\int_1^2 \dfrac{dx}{x^3} = -\dfrac{\ln 2}{8} - \dfrac{1}{4x^2}\Big|_1^2 = \dfrac{3-2\ln 2}{16}$.

2. Ta có:

$$|A| = \left|\frac{(x-1)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}\right| \le \frac{(x+y)(1+xy)}{\left[(x+y)+(1+xy)\right]^2} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le A \le \frac{1}{4}.$$

Vậy, ta có :

- $A_{Min} = -\dfrac{1}{4}$, đạt được khi $x = 0$ và $y = 1$.
- $A_{Max} = \dfrac{1}{4}$, đạt được khi $x = 1$ và $y = 0$.

Câu V.a.

1. Ta có:

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k.x^k$$

từ đó, suy ra:

$$(1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k, \quad (1-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k.(-1)^k.$$

Cộng theo vế hai đẳng thức trên, ta được:

$$2^{2n-1} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2048 \Leftrightarrow 2n - 1 = 11 \Leftrightarrow n = 6.$$

Vậy, với $n = 6$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

2. Hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P), suy ra:

$$B\left(\frac{b^2}{16}; b\right), \ C\left(\frac{c^2}{16}; c\right), \text{ với } b \ne 4 \text{ và } c \ne 4.$$

Ta lần lượt:

- Phương trình đường thẳng (BC) được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{Qua B} \\ \text{Qua C} \end{cases} \Leftrightarrow (BC): \frac{x - \dfrac{c^2}{16}}{\dfrac{b^2}{16} - \dfrac{c^2}{16}} = \frac{y-c}{b-c}$$

$$\Leftrightarrow (BC): 16x - (b+c)y + bc = 0. \qquad (1)$$

- Từ điều kiện $\widehat{BAC} = 90^0$, suy ra:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b^2}{16} - 1; b - 4\right)\left(\frac{c^2}{16} - 1; c - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b^2}{16} - 1\right)\left(\frac{c^2}{16} - 1\right) + (b-4)(c-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 272 + 4(b + c) + bc = 0. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đường thẳng (BC) luôn đi qua điểm cố định I(17; –4).

Câu V.b.

1. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$0 < \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x} > 0 \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x} - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x} > 0 \\ \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x} \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ 2 - \sqrt{2} \le x \le 2 + \sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - \sqrt{2} \le x < 1 \\ 2 < x \le 2 + \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là tập $\left[2 - \sqrt{2}; 1\right) \cup \left(2; 2 + \sqrt{2}\right]$.

2. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

a. $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C bằng $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2007

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}, \text{ m là tham số.} \qquad (1)$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = -1$.
2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cùng với gốc toạ độ O tạo thành một tam giác vuông tại O.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình:

$$\left(1+\sin^2 x\right)\cos x + \left(1+\cos^2 x\right)\sin x = 1 + \sin 2x.$$

2. Tìm m để phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm thực.

Câu III: (2 điểm): Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(0; 1; 2) và hai đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}, \quad (d_2): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau.
2. Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $7x + y - 4z = 0$ và cắt hai đường thẳng (d_1), (d_2).

Câu IV: (2 điểm)

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (e+1)x$, $y = (1+e^x)x$.
2. Cho ba số thực dương x, y, z thay đổi và thoả mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}.$$

PHẦN TỰ CHỌN

Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho ΔABC có A(0; 2), B(−2; −2), C(4; −2). Gọi H là chân đường cao kẻ từ B, M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.
2. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \ldots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}.$$

Câu V.b Theo chương trình THPT phân ban (2 điểm)

1. Giải bất phương trình $2\log_3(4x - 3) + \log_{1/3}(2x + 3) \le 2$.
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC và CD. Chứng minh rằng AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Tham khảo định hướng trong câu I.1 của đề toán khối B – 2006.
2. Yêu cầu của bài toán được tổng quát dưới dạng "*Tìm giá trị của tham số để hàm số* $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ *có các điểm cực trị thoả mãn điều kiện* K ", khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Ta có:

- Miền xác định D.
- Đạo hàm y' và thiết lập phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. (1)

Bước 2: Hàm số có cực đại, cực tiểu

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc D.

Bước 3: Khi đó, (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn định lí Viét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \\ x_1'x_2 \end{cases}.$$

Bước 4: Toạ độ các điểm cực đại và cực tiểu là:

$$A(x_1, \frac{u'(x_1)}{v'(x_1)}); B(x_2, \frac{u'(x_2)}{v'(x_2)}).$$

Bước 5: Kiểm tra A, B thoả mãn tính chất K.

Cụ thể trong đề bài này là ΔOAB vuông tại O, khi đó ta có:

$$OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0.$$

Câu II.

1. Chúng ta đi đánh giá lần lượt:

   $VP = \sin^2x + \cos^2x + 2\sin x.\cos x = (\sin x + \cos x)^2$,

   $VT = (\sin x + \cos x) + \sin x.\cos x.(\sin x + \cos x)$,

   tức cả hai vế sẽ có nhân tử chung là $(\sin x + \cos x)$, điều đó khẳng định rằng phương trình sẽ được chuyển về dạng tích để giải.
2. Trước tiên, chúng ta đi nhận xét rằng:

   $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

do đó, để đại số hoá phương trình đã cho chúng ta sẽ thực hiện chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{x-1}$ hoặc $\sqrt{x+1}$. Và để m ở dạng tự do chúng ta sẽ chọn cách chia cho $\sqrt{x+1}$. Khi đó, ta được:

$$3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x+1)^2}} \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Từ đó, với việc sử dụng ẩn phụ $t=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ $(0 \le t < 1)$ chúng ta sẽ nhận được một phương trình bậc hai dạng:

$$3t^2-2t+m=0. \qquad (*)$$

Khi đó, để phương trình ban đầu có nghiệm thực điều kiện là phương trình (*) có nghiệm $t \in [0; 1)$. Với công việc này các em học sinh có thể sử dụng phương pháp tam thức bậc hai hoặc phương pháp hàm số.

Câu III.

1. Để chứng minh hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau, ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Thực hiện:

   - Với đường thẳng (d_1) chỉ ra vtcp $\vec{u_1}$ và điểm $M_1 \in (d_1)$.
   - Với đường thẳng (d_2) chỉ ra vtcp $\vec{u_2}$ và điểm $M_2 \in (d_2)$.

   Bước 2: Khẳng định:

   $$[\vec{u_1}, \vec{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$$

   Kết luận (d_1) và (d_2) chéo nhau.

2. Để "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *vuông góc với mặt phẳng* (P) *và cắt hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *chéo nhau cho trước*", ta có thể lựa chọn một trong ba cách:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P_1) thoả mãn điều kiện:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Có một vtcp } \vec{n} \\ (d_1) \in (P_1) \end{cases}.$$

Bước 3: Lập phương trình mặt phẳng (P_2) thoả mãn điều kiện:

$$(P_2): \begin{cases} \text{Có một vtcp } \vec{n} \\ (d_2) \in (P_2) \end{cases}.$$

Bước 4: Đường thẳng (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2).

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (Q) thoả mãn điều kiện:

$$(Q): \begin{cases} \text{Có một vtcp } \vec{n} \\ (d_1) \in (Q) \end{cases}.$$

Bước 3: Xác định giao điểm A của (d_2) và (Q).

Bước 4: Lập phương trình đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện:

$$(d): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{vtcp } \vec{n} \end{cases}.$$

Cách 3: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Giả sử đường thẳng (d) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại A, B. Khi đó toạ độ A, B theo thứ tự thoả mãn các phương trình của (d_1) và (d_2).

Bước 3: Từ điều kiện AB vuông góc với mặt phẳng (P) ta xác định được toạ độ của A, B.

Bước 4: Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua A và B (hoặc qua A có vtcp $\vec{n}$).

Câu IV.

1. Để "*Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số* $y = f(x)$, $y = g(x)$", ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đường đã cho:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \text{Nghiệm nhỏ a và nghiệm lớn b.}$$

Bước 2: Gọi S là diện tích cần xác định, ta có:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx. \qquad (1)$$

Bước 3: Xét dấu biểu thức $f(x) - g(x)$ trên $[a; b]$.

Từ đó, phân được đoạn $[a; b]$ thành các đoạn nhỏ, giả sử:

$$[a; b] = [a; c_1] \cup [c_1; c_2] \cup ... \cup [c_k; b].$$

mà trên mỗi đoạn $f(x) - g(x)$ chỉ có một dấu.

Bước 4: Khi đó:

$$S = I = \int_a^{c_1} |f(x) - g(x)|dx + ... + \int_{c_k}^{b} |f(x) - g(x)|dx.$$

2. Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến chứa căn có tính đối xứng, do đó chúng ta sẽ định hướng thành các phần việc:

- Các phần tử cơ bản trong A là $x\sqrt{x}$, $y\sqrt{y}$, $z\sqrt{z}$.

- Cần biến đổi các biểu thức $x^2(y + z)$, $y^2(z + x)$, $z^2(x + y)$ theo các phần tử cơ bản trên dựa trên giả thiết x, y, z dương và xyz = 1. Ta có:

$$x^2(y+z) \geq x^2.2\sqrt{yz} = 2x^2\sqrt{\frac{1}{x}} = 2x\sqrt{x}.$$

- Khi đó, bằng việc sử dụng ẩn phụ a, b, c cho các mẫu số và tính $x\sqrt{x}$, $y\sqrt{y}$, $z\sqrt{z}$ theo a, b, c chúng ta sẽ nhận được bất đẳng thức mới:

$$A \geq \frac{f_1(a,b,c)}{a} + \frac{f_2(a,b,c)}{b} + \frac{f_3(a,b,c)}{a}.$$

Công việc còn lại chỉ là một thủ thuật khá đơn giản khi áp dụng bất đẳng thức Côsi đó là tách chúng thành các phân số đơn.

Câu V.a.

1. Để lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm H, M, N (đường tròn ngoại tiếp ΔHMN) ta cân nhắc lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Tổng quát, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử đường tròn (C) có phương trình:

(C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c \geq 0$. (*)

Bước 2: Từ điều kiện H, M, N thuộc (C), ta được hệ 3 phương trình với ba ẩn a, b, c.

Thay a, b, c vào (*) ta được phương trình của (C).

Hướng 2: Dựa trên dạng đặc biệt của ΔABC, tức là:

1. Nếu ΔABC vuông tại A, thì:

$$(C): \begin{cases} \text{tâm I là trung điểm BC} \\ R = \dfrac{BC}{2} \end{cases}.$$

2. Nếu ΔABC đều, cạnh bằng a, thì:

$$(C): \begin{cases} \text{tâm I là trọng tâm } \Delta ABC \\ R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Tuy nhiên với đề ra, trước tiên chúng ta cần thực hiện việc tìm toạ độ các điểm M, N, H.

2. Khi gặp phải bài toán "Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}+1}."$$

Các em học sinh cần liên tưởng tới ngay một bài toán cơ bản là "Chứng minh rằng:

$$C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n}C_n^n = \frac{2^n-1}{n+1}"$$

và chúng ta đã thực hiện nó như sau:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n. \qquad (1)$$

Lấy tích phân theo x từ 0 đến 1 hai vế của (1), ta được:

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n) dx$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^n}{n+1}\right|_0^1 = \left(C_n^0 x + \frac{1}{2} C_n^1 x^2 + \frac{1}{3} C_n^2 x^3 + ... + \frac{1}{n} C_n^n x^{n+1}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^n - 1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + ... + \frac{1}{n} C_n^n, \text{ đpcm.}$$

Quay lại với đề bài, chúng ta lần lượt đánh giá:

- Cần sử dụng khai triển bậc 2n.
- Không tồn tại C_{2n}^{2k}, do đó cần sử dụng đồng thời các khai triển:

$$(1+x)^{2n}, (1-x)^{2n}$$

để nhận được biểu thức: $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + ... + C_{2n}^{2n-1}$.

Câu V.b.

1. Bất phương trình được giải theo các bước:
   Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho bất phương trình. (*)
   Bước 2: Sử dụng các phép biến đổi tương đương để giải bất phương trình trên.
   Bước 3: Kiểm tra điều kiện (*) rồi kết luận về nghiệm của bất phương trình.
2. Công việc:
   - Chứng minh rằng AM vuông góc BP sẽ được thực hiện bằng việc chứng minh BP ⊥ (AMN).
   - Tính thể tích khối tứ diện CMNP hoàn toàn được thực hiện khi các em lựa chọn được đỉnh, để từ đó xác định ra đường cao và đáy.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2007

Câu I.

1. *Bạn đọc tự làm.*
2. Đạo hàm:

$$y' = \frac{x^2 + 4x + 4 - m^2}{(x+2)^2},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 4x + 4 - m^2 = 0. \quad (1)$$

a. Hàm số có có cực đại và cực tiểu khi:

(1) có hai nghiệm phân biệt khác −2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4 + m^2 > 0 \\ 4 - 8 + 4 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Khi đó, đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là:

$A(-2-m;-2)$ và $B(m-2;4m-2)$.

b. Nhận xét rằng $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ nên để ΔOAB vuông tại O, điều kiện là:

$$OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (-2-m)(m-2) - 2(4m-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 8m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \pm 2\sqrt{6}.$$

Vậy, với $m = -4 \pm 2\sqrt{6}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu II.

1. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x + \cos x) + (\sin^2 x.\cos x + \sin x.\cos^2 x) = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + \sin x.\cos x.(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2,$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sin x.\cos x - \sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ 1 - \sin x = 0 \\ 1 - \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

2. Điều kiện $x \geq 1$.

Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{x+1}$, ta được:

$$3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x+1)^2}} \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$, ta có biến đổi: $t = \sqrt[4]{1 - \dfrac{2}{x+1}} \Rightarrow 0 \leq t < 1$

Khi đó, phương trình có dạng: $3t^2 - 2t = -m$. (*)

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 - 2t$ trên tập $D = [0; 1)$, ta có:

$$f'(t) = 6t - 2, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Ta có bảng biến thiên:

t	0		1/3		1
f'		−	0	+	0
f	0	↘	−1/3	↗	1

Để phương trình ban đầu có nghiệm thực điều kiện là phương trình (*) có nghiệm $t \in [0; 1)$, tức đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $f(t) = 3t^2 - 2t$ trên tập $D = [0; 1)$, ta được:

$$-\frac{1}{3} < -m < 1 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{1}{3}.$$

Vậy, với $-1 < m < \frac{1}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu III.

1. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) đi qua điểm $M_1(0; 1; -2)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; -1; 1)$.
- Đường thẳng (d_2) đi qua điểm $M_2(-1; 1; 3)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_2}(2; 1; 0)$.

Khi đó:

$$[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = 21 \neq 0$$

Vậy, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

2. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được $\vec{n}(7; 1; -4)$.

Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), trong đó:

$$(P_1): \begin{cases} (d_1) \subset (P_1) \\ (P) \perp (P_1) \end{cases} \text{ và } (P_2): \begin{cases} (d_2) \subset (P_2) \\ (P) \perp (P_2) \end{cases}.$$

- Xác định phương trình mặt phẳng (P_1), ta có:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \\ \text{Cặp vtcp } \vec{n} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(0;1;-2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = [\vec{n}, \overrightarrow{u_1}] = (-3;-15;-9) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P_1): x + 5y + 3z + 1 = 0.$$

- Xác định phương trình mặt phẳng (P_2), ta có:

$$(P_2: \begin{cases} \text{Qua } M_2 \\ \text{Cặp vtcp } \vec{n} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(-1;1;3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2} = [\vec{n}, \overrightarrow{u_2}] = (4;-8;5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P_2): 4x - 8y + 5z - 3 = 0.$$

Vậy, toạ độ các điểm thuộc đường thẳng (d) thoả mãn:

$$\begin{cases} x + 5y + 3z + 1 = 0 \\ 4x - 8y + 5z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow N(2; 0; -1) \in (d).$$

Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } N(2;0;-1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(7;1;-4) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = t \\ z = -1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được $\vec{n}(7;\ 1;\ -4)$.

Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng và (d) cắt (d_2) tại E.

- Gọi (P_1) là phương trình mặt phẳng:

$$(P_1):\ \begin{cases}(d_1)\subset(P_1)\\(P)\perp(P_1)\end{cases}\Leftrightarrow(P_1):\ \begin{cases}\text{Qua } M_1\\\text{Cặp vtcp } \vec{n} \text{ và } \vec{u_1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(P_1):\ \begin{cases}\text{Qua } M_1(0;1;-2)\\\text{vtpt } \vec{n_1}=[\vec{n},\ \vec{u_1}]=(-3;-15;-9)\end{cases}\Leftrightarrow(P_1):\ x+5y+3z+1=0.$$

- Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=3\\x+5y+3z+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-5\\y=-1\\z=3\end{cases}\Leftrightarrow E(-5;\ -1;\ 3).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d):\ \begin{cases}\text{Qua } E(-5;-1;3)\\\text{vtcp } \vec{n}(7;1;-4)\end{cases}\Leftrightarrow(d):\ \begin{cases}x=-5+7t\\y=-1+t\\z=3-4t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Cách 3: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được $\vec{n}(7;\ 1;\ -4)$.

Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng và (d) cắt (d_1) tại F.

- Gọi (P_2) là phương trình mặt phẳng:

$$(P_2):\ \begin{cases}(d_2)\subset(P_2)\\(P)\perp(P_2)\end{cases}\Leftrightarrow(P_2:\ \begin{cases}\text{Qua } M_2\\\text{Cặp vtcp } \vec{n} \text{ và } \vec{u_2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(P_2):\ \begin{cases}\text{Qua } M_2(-1;1;3)\\\text{vtpt } \vec{n_2}=[\vec{n},\ \vec{u_2}]=(4;-8;5)\end{cases}\Leftrightarrow(P_2):\ 4x-8y+5z-3=0.$$

- Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}4x-8y+5z-3=0\\\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\\z=-1\end{cases}\Rightarrow F(2;\ 0;\ -1).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d):\ \begin{cases}\text{Qua } F(2;0;-1)\\\text{vtcp } \vec{n}(7;1;-4)\end{cases}\Leftrightarrow(d):\ \begin{cases}x=2+7t\\y=t\\z=-1-4t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Cách 4: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được $\vec{n}(7; 1; -4)$.

Chuyển phương trình đường thẳng (d_1) về dạng tham số.

$$(d_1): \begin{cases} x = 2u \\ y = 1 - u \\ z = -2 + u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng và (d) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại các điểm F, E. Khi đó:

- Điểm $F \in (d_1)$ suy ra $F(2u; 1 - u; u - 2)$.
- Điểm $E \in (d_2)$ suy ra $E(2t - 1; 1 + t; 3)$.
- Để EF vuông góc với mặt phẳng (P) ta được:

$$\overrightarrow{EF} // \vec{n} \Leftrightarrow \frac{2u - 2t + 1}{7} = \frac{-u - t}{1} = \frac{u - 5}{-4} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow F(2; 0; -1).$$

Khi đó, đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } F(2;0;-1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(7;1;-4) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = t \\ z = -1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Câu IV.

1. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$$(e + 1)x = (1 + e^x)x \Leftrightarrow x(e^x - e) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}..$$

Khi đó:

$$S = \int_0^1 \left|x(e^x - e)\right| dx = \int_0^1 x(e - e^x)dx = e\underbrace{\int_0^1 x.dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 xe^x.dx}_{I_2}. \quad (1)$$

Ta lần lượt:

- Với I_1 thì:

$$I_1 = \frac{ex^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{e}{2}. \quad (2)$$

- Với I_2 thì đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó: $I_2 = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1.$ (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được $S = \frac{e}{2} - 1$.

2. Với giả thiết x, y, z dương và xyz = 1, ta có:

$$x^2(y+z) \geq x^2.2\sqrt{yz} = 2x^2\sqrt{\frac{1}{x}} = 2x\sqrt{x}$$

chứng minh tương tự, ta cũng có $y^2(z+x) \geq 2y\sqrt{y}$ và $z^2(x+y) \geq 2z\sqrt{z}$.

Khi đó, ta nhận được đánh giá:

$$A \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Bằng việc sử dụng ẩn phụ:

$$\begin{cases} a = x\sqrt{x}+2y\sqrt{y} \\ b = y\sqrt{y}+2z\sqrt{z} \\ c = z\sqrt{z}+2x\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x} = \dfrac{4c+a-2b}{9} \\ y\sqrt{y} = \dfrac{4a+b-2c}{9} \\ z\sqrt{z} = \dfrac{4b+c-2a}{9} \end{cases}.$$

Khi đó, ta nhận được bất đẳng thức mới:

$$A \geq \frac{2}{9}\left(\frac{4c+a-2b}{b} + \frac{4a+b-2c}{c} + \frac{4b+c-2a}{a}\right)$$

$$= \frac{2}{9}\left[4\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-6\right] \geq \frac{2}{9}(4.3+3-6) = 2.$$

Vậy, ta có $A_{Min} = 2$, đạt được khi:

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ x = y = z \\ a = b = c \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Câu V.a.

1. Ta lần lượt có:

- M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC nên M(−1; 0), N(1; −2).
- Giả sử H(x; y), ta có:

$$\begin{cases} H \in AC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4(y-2) = 0 \\ 4(x+2)-4(y+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H(1; 1).$$

Giả sử đường tròn (C) ngoại tiếp ΔHMN có dạng:

(C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c \geq 0$.

Điểm H, M, N $\in$ (C), ta được:

$$\begin{cases} 1+1-2a-2b+c=0 \\ 1+2a+c=0 \\ 1+4-2a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b-c=2 \\ 2a+c=-1 \\ 2a-4b-c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b=-1/2, \text{ thoả mãn.} \\ c=-2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn (C): $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$.

2. Ta có:

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n}. \quad (1)$$

$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 - \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n}. \quad (2)$$

Trừ theo vế (1) và (2), ta được:

$$(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n} = 2\left(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}\right] = C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}. \quad (3)$$

Lấy tích phân theo x từ 0 đến 1 hai vế của (3), ta được:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left[(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}\right] dx = \int_0^1 \left(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{2n+1} + (1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)}\right|_0^1 = \left.\left(C_{2n}^1 \frac{x^2}{2} + C_{2n}^3 \frac{x^4}{4} + \ldots + C_{2n}^{2n-1} \frac{x^{2n}}{2n}\right)\right|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2n}-1}{2n+1} = \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \ldots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}.$$

Câu V.b.

1. Điều kiện:

$$\begin{cases} 4x-3>0 \\ 2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}. \quad (*)$$

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_3(4x-3)^2 - \log_3(2x+3) \le 2 \Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2 \le \log_3(2x+3) + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2 \le \log_3 9(2x+3) \Leftrightarrow (4x-3)^2 \le 9(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 42x - 18 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \le x \le 3.$$

Vậy, kết hợp với (*) bất phương trình có nghiệm là $\frac{3}{4} < x \le 3$.

2 *Bạn đọc tự vẽ hình.*

a Chứng minh rằng AM vuông góc với BP.

Gọi H là trung điểm AD, ta có:

ΔSAD đều $\Rightarrow SH \perp AD$.

Theo giả thiết:

$(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BP.$ (1)

Mặt khác, trong hình vuông ABCD, ta có:

$\Delta CDH = \Delta BCP \Rightarrow CH \perp BP.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BP \perp (SCH)$.

Ta lại có:

$$\begin{cases} MN // SC \\ AN // CH \end{cases} \Rightarrow (AMN) // (SHC) \Rightarrow BP \perp (AMN)$$

$$\Rightarrow BP \perp AM, \text{ đpcm.}$$

b Tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

Kẻ MK vuông góc với mặt phẳng (ABCD), ta có:

$$V_{CMNP} = \frac{1}{3} MK.S_{\Delta CNP}, \quad (3)$$

trong đó:

$$MK = \frac{1}{2} SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}, \quad (4)$$

$$S_{\Delta CNP} = \frac{1}{2} CN.CP = \frac{a^2}{8}. \quad (5)$$

Thay (4), (5) vào (3), ta được:

$$V_{CMNP} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a^2}{8} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$$

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI B NĂM 2007

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số:

$$y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1,\ m \text{ là tham số.} \quad (1)$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 1.
2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cách đều gốc toạ độ O.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$.
2. Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m, phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)}.$$

Câu III: (2 điểm): Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0,$$
$$(P): 2x - y + 2z - 14 = 0.$$

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.
2. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P) là lớn nhất.

Câu IV: (2 điểm)

1. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = x.\ln x$, $y = 0$, $x = e$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.
2. Cho ba số thực dương x, y, z thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right).$$

PHẦN TỰ CHỌN

Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Tính hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức Niutơn $(2 + x)^n$, biết rằng:

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 2048.$$

(n nguyên dương, C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử).

2. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm A(2; 2) và các đường thẳng:

$$(d_1): x + y - 2 = 0,\ (d_2): x + y - 8 = 0.$$

Tìm toạ độ các điểm B và C lần lượt thuộc (d_1), (d_2) sao cho ΔABC vuông cân tại A.

Câu V.b Theo chương trình THPT phân ban (2 điểm)

1. Giải phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$.

2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AE và BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với BD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Tham khảo định hướng trong câu I.1 của đề toán khối B – 2006.
2. Yêu cầu của bài toán được tổng quát dưới dạng "*Tìm giá trị của tham số để hàm số* $y = f(x)$ *có các điểm cực trị thoả mãn điều kiện* K ", khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Ta có:

- Miền xác định D.
- Đạo hàm y' và thiết lập phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. (1)

Bước 2: Hàm số có cực đại, cực tiểu

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc D.

Bước 3: Khi đó, (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn định lí Viét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{cases}.$$

Bước 4: Toạ độ các điểm cực đại và cực tiểu là:

$$A(x_1, f(x_1)); B(x_2, f(x_2)).$$

Bước 5: Kiểm tra A, B thoả mãn tính chất K.

Cụ thể trong đề bài này là OA = OB.

Câu II.

1. Chúng ta đi đánh giá lần lượt:

$$1 - 2\sin^2 2x = \cos 4x,$$

$$\sin 7x - \sin x = 2\cos 4x.\sin 3x,$$

tức cả hai vế sẽ có nhân tử chung là cos4x, điều đó khẳng định rằng phương trình sẽ được chuyển về dạng tích để giải.

2. Trước tiên, chúng ta đi nhận xét rằng:

$$x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$$

do đó, bằng cách bình phương hai vế của phương trình (với điều kiện $x \geq 2$) chúng ta sẽ nhận được:

$$(x - 2)f(x, m) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 2 \\ f(x, m) = 0 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, để chứng minh với $m > 0$ phương trình ban đầu luôn có hai nghiệm thực phân biệt chúng ta chỉ cần đi chứng minh phương trình $f(x) = 0$ luôn có đúng một nghiệm thuộc $(2; +\infty)$.

Câu III.

1. Để viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt (S) (có tâm I bán kính R) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính r (hoặc biết chu vi, diện tích), ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Giả sử mặt phẳng (P) thỏa mãn điều kiện đầu bài có phương trình:
   $$(P): Ax + By + Cz + D = 0, \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

   Bước 2: Ta lần lượt sử dụng các giả thiết:
   - Lấy hai điểm C, D thuộc (d) suy ra C, D thuộc (P). (1)
   - Vì $(P) \cap (S) = (C)$ có bán kính là r, khi đó:
   $$r^2 = R^2 - d^2(I, (P)). \quad (2)$$

   Bước 3: Giải (1) và (2) để tìm được cách biểu diễn ba trong bốn ẩn số A, B, C, D theo một ẩn còn lại. Từ đó, nhận được phương trình mặt phẳng (P).

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đặc biệt $r = R$ chúng ta sử dụng lập luận:

Bước 1: Ta lần lượt sử dụng các giả thiết:
- Vì $(P) \cap (S) = (C)$ có bán kính là $r = R$, nên (P) đi qua I.
- Lấy điểm A thuộc (d) và tìm một vtcp $\vec{u}$ của (d).

Bước 2: Phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:
$$(P): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{Có cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{IA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{IA}\right] \end{cases}.$$

2. Sử dụng nhận xét rằng với đường thẳng (d) đi qua tâm I của mặt cầu (S) và vuông góc với mặt phẳng (P) thì (d) sẽ cắt (S) tại hai điểm A, B. Và khi đó, nếu $d(A, (P)) > d(B, (P))$ thì $d(M, (P))$ lớn nhất khi $M \equiv A$.
   Từ đó, ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Lập phương trình đường thẳng (d) qua I và vuông góc với (P).

   Bước 2: Tìm toạ độ các giao điểm A, B của (d) với (S).
   Tính $d(A, (P))$, $d(B, (P))$.

   Bước 3: Lập lại nhận xét trên.

Câu IV.

1. Tham khảo định hướng trong câu IV của đề toán khối A – 2007.
2. Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến có tính đối xứng, do đó chúng ta sẽ định hướng thành các phần việc:
   - Gom lại các phần tử trong bất đẳng thức, cụ thể:
   $$A = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}\right) + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}.$$

- Công việc còn lại chỉ là một thủ thuật khá đơn giản khi áp dụng bất đẳng thức Côsi đó là tách $\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$ chúng thành các phân số đơn dạng $\frac{a}{x}, \frac{a}{y}, \frac{a}{z}$ để chuyển A về dạng.

$$\left(\frac{x^2}{2}+\frac{a}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{a}{y}\right)+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{a}{y}\right).$$

Câu V.a.

1. Từ yêu cầu của bài toán chúng ta thấy có hai phần việc phải thực hiện:
   Phần 1: Tìm n từ biểu thức điều kiện:
   $$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 2048$$
   xuất phát từ các đẳng thức cơ bản:
   $$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = (3-1)^n.$$
   Phần 2: Tính hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức Niutơn:
   $$(2+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k .2^{n-k}.x^k$$
   Hệ số của x^{10} là $C_n^{10}.2^{n-10}$.
2. Trước tiên, các em học sinh hãy tham khảo lại định hướng trong câu V.a.2 của đề toán khối A – 2006. Từ đó, định hướng được các bước giải sau:
   Bước 1: Các điểm B và C lần lượt thuộc (d_1) và (d_2) nên:
   $$B(t; 2-t), C(u; 8-u).$$
   Bước 2: Để ΔABC vuông cân tại A điều kiện là:
   $$\begin{cases} AB \perp AC \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ AB^2 = AC^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \\ u \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ B, C.}$$

Câu V.b.

1. Bằng nhận xét:
   $$\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=1$$
   các em học sinh có thể thấy ngay rằng phương trình đã cho sẽ giải được bằng cách sử dụng ẩn phụ $t=\left(\sqrt{2}-1\right)^x$ suy ra $\left(\sqrt{2}+1\right)^x=\frac{1}{t}$.
2. Công việc:
   - Chứng minh MN vuông góc với BD sẽ được rút ra từ nhận xét rằng MN // (P) và BD ⊥ (P).
   - Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC sẽ được thực hiện bằng việc chọn một mặt phẳng chứa AC và song song với MN.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI B NĂM 2007

Câu I.

1. *Bạn đọc tự làm.*
2. Đạo hàm:

$$y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x - m^2 + 1 = 0. \qquad (1)$$

a. Hàm số có có cực đại và cực tiểu khi:

(1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$

Khi đó, đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là:

$A(1 - m ; -2 - 2m^3)$ và $B(1 + m ; -2 + 2m^3)$.

b. Để các điểm cực trị của đồ thị cách đều gốc toạ độ O, điều kiện là:

$$OA = OB \Leftrightarrow OA^2 = OB^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - m)^2 + (-2 - 2m^3)^2 = (1 + m)^2 + (-2 + 2m^3)^2$$

$$\Leftrightarrow 8m^3 - 2m = 0 \overset{m\neq 0}{\Leftrightarrow} m = \pm\frac{1}{2}.$$

Vậy, với $m = \pm\frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu II.

1. Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin^2 2x - 1 + \sin 7x - \sin x = 0 \Leftrightarrow -\cos 4x + 2\cos 4x.\sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \sin 3x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

2. Với $m > 0$ thì điều kiện của phương trình là $x \geq 2$.

Phương trình được biến đổi tương đương về dạng:

$$(x - 2)(x + 4) = \sqrt{m(x - 2)} \Leftrightarrow (x - 2)^2(x + 4)^2 = m(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)[(x-2)(x+4)^2 - m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^3 + 6x^2 - 32 - m = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta chỉ cần đi chứng minh phương trình (*) luôn có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(2; +\infty)$.

Thật vậy, xét hàm số $y = x^3 + 6x^2 - 32$ trên tập $D = (2; +\infty)$, ta có:

$y' = 3x^2 + 12x > 0, \forall x \in D \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên D.

Ta có bảng biến thiên:

x	2		$+\infty$
y'		+	
y	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy với mọi $m > 0$ phương trình (*) luôn có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(2; +\infty)$.

Vậy, với mọi $m > 0$ phương trình ban đầu luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

Câu III. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1)$ và bán kính $R = 3$.

1. Mặt phẳng (Q) cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3 thì phải đi qua I. Từ đó, ta được:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua I} \\ Ox \subset (Q) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{Qua I} \\ \text{Cặp vtcp } \vec{i} \text{ và } \overrightarrow{OI} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{Qua } I(1;-2;-1) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\vec{i}, \overrightarrow{OI}\right] = (0;1;-2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): y - 2z = 0.$$

2. Nhận xét rằng đường thẳng (d) đi qua tâm I của mặt cầu (S) và vuông góc với mặt phẳng (P) thì (d) sẽ cắt (S) tại hai điểm A, B. Và khi đó, nếu $d(A, (P)) > d(B, (P))$ thì $d(M, (P))$ lớn nhất khi $M \equiv A$. Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } I(1;-2;-1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2;-1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đường thẳng (d) sẽ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B với toạ độ được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d) vào (S) như sau:

$$(1 + 2t)^2 + (-2 - t)^2 + (2t - 1)^2 - 2(1 + 2t) + 4(-2 - t) + 2(2t - 1) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Rightarrow A(-1; -1; -3) \text{ và } B(3; -3; 1).$$

Ta có:

$$d(A, (P)) = \frac{|2.(-1) - (-1) + 2.(-3) - 14|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 7,$$

$$d(B,(P)) = \frac{|2.3-(-3)+2.1-14|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 1, \Rightarrow d(A,(P)) > d(B,(P)).$$

Vậy, với điểm M(−1; −1; −3) thuộc mặt cầu (S) thì khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P) là lớn nhất.

Câu IV.

1. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị y = x.lnx và y = 0 là nghiệm của phương trình:

$$x.\ln x = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Khi đó, thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox là:

$$V = \pi\int_1^e (x.\ln x)^2\,dx = \pi\int_1^e x^2.\ln^2 x\,dx.$$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^2.dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln x.dx}{x} \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$.

Khi đó:

$$V = \pi\left[\frac{x^3}{3}.\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2.\ln x\,dx\right] = \frac{\pi e^3}{3} - \frac{2\pi}{3}\underbrace{\int_1^e x^2.\ln x\,dx}_{I}. \quad (1)$$

Với I, ta đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2.dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$.

Khi đó:

$$I = \frac{x^3}{3}.\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2.dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e = \frac{2e^3+1}{9}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $V = \dfrac{\pi(5e^3-2)}{27}$.

2. Biến đổi A về dạng:

$$A = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)+\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}.$$

Nhận xét rằng: $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{x^2+y^2}{2}+\dfrac{y^2+z^2}{2}+\dfrac{z^2+x^2}{2} \geq xy+yz+zx$

do đó, ta được bất đẳng thức:

$$A \ge \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)+\frac{xy+yz+zx}{xyz} = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{z^2}{2}+\frac{1}{z}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\right)+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2y}\right)+\left(\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z}\right)$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}.\frac{1}{2x}.\frac{1}{2x}}+3\sqrt[3]{\frac{y^2}{2}.\frac{1}{2y}.\frac{1}{2y}}+3\sqrt[3]{\frac{z^2}{2}.\frac{1}{2z}.\frac{1}{2z}} = \frac{9}{2}$$

Vậy, ta có $A_{Min} = \frac{9}{2}$, đạt được khi:

$$\begin{cases} x = y = z \\ \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Câu V.a.

1. Ta có: $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 2048$

$\Leftrightarrow (3-1)^n = 2048 \Leftrightarrow n = 11.$

Hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức Niutơn: $(2+x)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k.2^{11-k}.x^k$.

Hệ số của x^{10} là $C_{11}^{10}.2^{11-10} = 22.$

2. Các điểm B và C lần lượt thuộc (d_1) và (d_2) nên B(t; 2 – t), C(u; 8 – u).

Để ΔABC vuông cân tại A điều kiện là:

$$\begin{cases} AB \perp AC \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ AB^2 = AC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-2)(u-2)-t(6-u) = 0 \\ (t-2)^2+t^2 = (u-2)^2+(6-u)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2tu-8t-2u+4 = 0 \\ 2t^2-4t+4 = 2u^2-16u+40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tu-4t-u+2 = 0 \\ t^2-2t+2 = u^2-8u+20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(u-4) = 2 \\ (t-1)^2-(u-4)^2 = 3 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt x = t – 1 và y = u – 4, hệ (*) được chuyển về dạng:

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2-y^2 = 3 \end{cases} \overset{x,\,y\text{ cùng dấu}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2y^2 = 4 \\ x^2-y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 3 \\ x^2(-y^2) = -4 \end{cases}$$

suy ra x^2 và $-y^2$ là nghiệm của phương trình:

$$v^2 - 3v - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v = -1 \\ v = 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ -y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}.$$

Bởi x, y cùng dấu nên ta lần lượt có:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 = 2 \\ u - 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ u = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1(3; -1) \\ C_1(5; 3) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 = -2 \\ u - 4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_2(-1; 3) \\ C_2(3; 5) \end{cases}.$$

Vậy, tồn tại hai cặp điểm B, C thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***: Hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

cúng có thể được giải đơn giản hơn bằng cách rút y từ phương trình thứ nhất của hệ $\left(y = \frac{2}{x} \right)$ rồi thay vào phương trình thứ hai của hệ:

$$x^2 - \left(\frac{2}{x} \right)^2 = 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \overset{x^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Khi đó, ta lần lượt:

- Với x = 2 thì y = 1, ta được:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 = 2 \\ u - 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ u = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1(3; -1) \\ C_1(5; 3) \end{cases}.$$

- Với x = −2 thì y = −1, ta được:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 = -2 \\ u - 4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_2(-1; 3) \\ C_2(3; 5) \end{cases}.$$

Vậy, tồn tại hai cặp điểm B, C thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu V.b.

1. Nhận xét rằng:

$$\left(\sqrt{2} - 1 \right)\left(\sqrt{2} + 1 \right) = 1$$

nên đặt $t = \left(\sqrt{2} - 1 \right)^x$ suy ra $\left(\sqrt{2} + 1 \right)^x = \frac{1}{t}$, điều kiện $t > 0$.

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$t+\frac{1}{t}-2\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow t^2-2t\sqrt{2}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2}+1 \\ t=\sqrt{2}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2}-1\right)^x=\sqrt{2}+1 \\ \left(\sqrt{2}-1\right)^x=\sqrt{2}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm là $x = \pm 1$.

2. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

a. Chứng minh rằng MN vuông góc với BD.

Gọi P là trung điểm của SA, ta có ngay:

MNCP là hình bình hành $\Rightarrow$ MN // CP $\Rightarrow$ MN // (SAC). (1)

Mặt khác, ta có BD $\perp$ (SAC). (2)

Từ (1) và (2) suy ra BD $\perp$ MN.

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Ta có đánh giá:

$$MN // (SAC) \Rightarrow d(MN, AC) = d(MN, (SAC)) = d(N, (SAC))$$

$$= \frac{1}{2}d(B, (SAC)) = \frac{1}{4}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI D NĂM 2007

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số: $y = \frac{2x}{x+1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Tìm toạ độ điểm M thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục Ox, Oy tại A, B và ΔOAB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2.$
2. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=5 \\ x^3+\frac{1}{x^3}+y^3+\frac{1}{y^3}=15m-10 \end{cases}$$

Câu III: (2 điểm): Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm A(1; 4; 2), B(−1; 2; 4) và đường thẳng (Δ) có phương trình:

$$(\Delta): \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}.$$

1. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua trọng tâm G của ΔOAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB).
2. Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng (Δ) sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Câu IV: (2 điểm)

1. Tính tích phân $I = \int_1^e x^3.\ln^2 x.dx$.
2. Cho 0 < b < a chứng minh rằng $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b < \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$.

PHẦN TỰ CHỌN

Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Tính hệ số của x^5 trong khai triển đa thức $x(1 - 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$.
2. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) và đường thẳng (d) có phương trình:

   (C): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$, (d): $3x - 4y + m = 0$.

   Tìm m để trên (d) có duy nhất một điểm P mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho ΔPAB đều.

Câu V.b Theo chương trình THPT phân ban (2 điểm)

1. Giải phương trình $\log_2\left(4^x + 15.2^x + 27\right) + 2\log_2 \frac{1}{4.2^x - 3} = 0$.
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh rằng ΔSCD vuông và tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Tham khảo định hướng trong câu I.1 của đề toán khối B – 2006.
2. Với yêu cầu " *Tìm điểm* M *thuộc đồ thị hàm số* (C): y = f(x) *sao cho tiếp tuyến tại* M *thoả mãn tính chất* K ", ta thực hiện theo các bước sau:

   Bước 1: Xét hàm số, suy ra đạo hàm y' = f'(x).

   Bước 2: Điểm M∈(C) ⇒ M(a, f(a)).

   Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

   (d): y = f'(a)(x − a) + f(a).

Bước 3: Sử dụng điều kiện K, ta xác định được a.

Bước 4: Kết luận về điểm M.

Cụ thể trong đề bài này chúng ta cần:

- Toạ độ giao điểm A của (d) với Ox.
- Toạ độ giao điểm B của (d) với Oy.
- Thiết lập điều kiện:

$$S_{OAB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{4} \Leftrightarrow OA.OB = \frac{1}{2}.$$

Câu II.

1. Chúng ta có đánh giá:

$$\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 1 + \sin x$$

tức phương trình có dạng:

$$1 + \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1.$$

Đó chính là phương trình bậc nhất đối với sin và cos.

Chúng ta có tổng quát:

$$a\sin x + b\cos x = c \qquad (1)$$

lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Kiểm tra:

1. Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ phương trình vô nghiệm.
2. Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$, khi đó để tìm nghiệm của phương trình (1) ta thực hiện tiếp bước 2.

Bước 2: Chia hai vế phương trình (1) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ nên tồn tại góc β sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\beta, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\beta .$$

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$\sin x.\cos\beta + \sin\beta.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của sin.

Cách 2: Thực theo các bước:

Bước 1: Với $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$, kiểm tra vào phương trình

Bước 2: Với $\cos\frac{x}{2}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\pi+2k\pi$, đặt $t=\tan\frac{x}{2}$, suy ra

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$a.\frac{2t}{1+t^2}+b.\frac{1-t^2}{1+t^2}=c \Leftrightarrow (c+b)t^2-2at+c-b=0 \qquad (2)$$

Bước 3: Giải phương trình (2) theo t.

2. Trước tiên, chúng ta đi nhận xét rằng:

- Đặt $u=x+\frac{1}{x}$ điều kiện $|u|\geq 2$ thì:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=u^3-3u.$$

- Tương tự, đặt $v=y+\frac{1}{y}$ điều kiện $|v|\geq 2$ thì $y^3+\frac{1}{y^3}=v^3-3v$.

Khi đó, hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} u+v=5 \\ u^3+v^3-3(u+v)=15m-10 \end{cases}$$

Từ đó, bằng cách thế từ phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai của hệ chúng ta sẽ nhận được một phương trình theo ẩn u hoặc v.

$$f(u, m)=0. \qquad (*)$$

Bài toán được chuyển về "Tìm giá trị của tham số m để phương trình (*) có nghiệm thực thoả mãn $|u|\geq 2$.

☞ ***Chú ý***: Nếu các em học sinh thực hiện phép thế dạng:

$$u^3+v^3=(u+v)^3-3uv(u+v)$$

thì sẽ nhận được hệ phương trình: $\begin{cases} u+v=5 \\ uv=8-m \end{cases}$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình: $t^2-5t+8-m=0$. (**)

Bài toán được chuyển về "Tìm giá trị của tham số m để phương trình (**) có hai nghiệm thực thoả mãn $|t|\geq 2$.

Câu III.

1. Đây là yêu cầu đơn giản, các em học sinh chỉ cần nhớ được công thức tìm toạ độ trọng tâm của tam giác, cụ thể với ΔOAB là:

$$G\left(\frac{x_A+x_B}{3};\frac{y_A+y_B}{3};\frac{z_A+z_B}{3}\right).$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } G\\ \text{vtcp } \vec{u}=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\end{cases}.$$

2. Tham khảo định hướng trong câu III.1 của đề toán khối B – 2006.

Câu IV.

1. Đây là tích phân một hàm số hỗn hợp (đa thức và siêu việt) và nó thuộc dạng cơ bản $I=\int_a^b f(x).\ln^n x.dx$ nên phương pháp được lựa chọn là "*Phương pháp tích phân từng phần*" với cách lựa chọn:

$$\begin{cases}u=\ln^n x\\ dv=f(x).dx\end{cases}.$$

2. Trước tiên hãy đi đánh giá vai trò của a, b trong bất đẳng thức được cho dưới dạng hàm số mũ bằng phép biến đổi đơn giản:

$$\frac{\left(4^a+1\right)^b}{2^{ab}}\le\frac{\left(4^b+1\right)^a}{2^{ab}}\Leftrightarrow\left(4^a+1\right)^b\le\left(4^b+1\right)^a. \qquad (*)$$

Tới đây, chúng ta hiểu rằng cần chuyển đổi a, b về những vế độc lập, mà để thực hiện điều này chúng ta chỉ có thể dựa trên tính chất $\log_a b^n=n\log_a|b|$. Do đó, lấy loga hai vế của (*), ta được:

$$\ln\left(4^a+1\right)^b\le\ln\left(4^b+1\right)^a\Leftrightarrow b.\ln\left(4^a+1\right)\le a.\ln\left(4^b+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\ln\left(4^a+1\right)}{a}\le\frac{\ln\left(4^b+1\right)}{b}. \qquad (**)$$

Cuối cùng, để chứng minh bất đẳng thức (**) cách duy nhất là sử dụng phương pháp hàm số với hàm đặc trưng là $y=\frac{\ln\left(4^x+1\right)}{x}$ trên $D=(0;+\infty)$.

Câu V.a.

1. Từ yêu cầu của bài toán chúng ta thấy có hai phần việc phải thực hiện:

Phần 1: Tính hệ số của x^5 trong khai triển $x(1-2x)^5$:

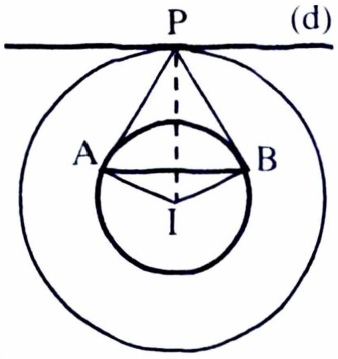
$$x\left(1-2x\right)^5=x\sum_{k=0}^{5}C_5^k(-2x)^k\Rightarrow\text{Đáp số là } C_1.$$

Phần 2: Tính hệ số của x^5 trong khai triển $x^2(1+3x)^{10}$:

$$x^2\left(1+3x\right)^{10}=x^2\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(3x)^k\Rightarrow\text{Đáp số là } C_2.$$

Vậy, hệ số của x^5 là C_1+C_2.

2. Trước tiên, các em học sinh hãy phác thảo dần hình vẽ để hiểu được các dẫn dắt sau:



- Vẽ đường tròn (C) tâm I và ΔPAB đều (PA, PB là tiếp tuyến của (C)). Ta có:

$$\Delta PAB \text{ đều} \Leftrightarrow \widehat{APB} = 60^0 \Leftrightarrow \widehat{API} = 30^0$$

$$\Leftrightarrow IP = 2IA = 2R - \text{không đổi}$$

$\Leftrightarrow$ P thuộc đường tròn (C') tâm I bán kính 2R.

- Vẽ đường tròn (C'). Như vậy P là giao điểm của (C') và (d). Khi đó, để có duy nhất một điểm P điều kiện là (d) tiếp xúc với (C'), suy ra:

$$d(I, (d)) = 2R.$$

Câu V.b.

1. Phương trình được giải theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Bước 2: Sử dụng các phép biến đổi tương đương để khử log, khi đó chúng ta sẽ nhận được một phương trình mũ dạng:

$$a.2^{2x} + b.2^x + c = 0.$$

Bước 3: Sử dụng ẩn phụ $t = 2^x$ để giải phương trình trên.

2. Công việc:

- Chứng minh rằng ΔSCD vuông được thực hiện bằng chứng minh $CD \perp SC$.
- Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) được thực hiện bằng việc nhận xét rằng BH cắt mặt phẳng (SCD) tại S, do đó:

$$\frac{d(H, (SCD))}{d(B, (SCD))} = \frac{SH}{SB}.$$

Mặt khác:

$$V_{B.SCD} = \frac{1}{3} d(B, (SCD)).S_{\Delta SCD} \Leftrightarrow d(B, (SCD)) = \frac{3V_{B.SCD}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{SA.S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta SCD}}.$$

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI B NĂM 2007

Câu I.

1. *Bạn đọc tự làm.*

2. Đạo hàm: $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$.

Điểm $M(a; y(a)) \in (C)$, khi đó phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$(d): y = y'(a)(x - a) + y(a) \Leftrightarrow (d): y = \frac{2}{(a+1)^2}x + \frac{2a^2}{(a+1)^2}.$$

Toạ độ giao điểm A của tiếp tuyến (d) với Ox là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{2}{(a+1)^2}x + \dfrac{2a^2}{(a+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -a^2 \end{cases} \Leftrightarrow A(-a^2; 0).$$

Toạ độ giao điểm B của tiếp tuyến (d) với Oy là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2}{(a+1)^2}x + \dfrac{2a^2}{(a+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2a^2}{(a+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow B\left(0; \dfrac{2a^2}{(a+1)^2}\right).$$

Ta có:

$$S_{OAB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{4} \Leftrightarrow OA.OB = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|-a^2\right|.\left|\frac{2a^2}{(a+1)^2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4a^4 = (a+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a^2 = a+1 \\ 2a^2 = -a-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a^2 - a - 1 = 0 \\ 2a^2 + a + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(1; 1) \\ M_2\left(-\dfrac{1}{2}; -2\right) \end{array}\right.$$

Vậy, tồn tại hai điểm M_1, M_2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu II.

1. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

2. Trước tiên, ta có:

- Đặt $u = x + \dfrac{1}{x}$ điều kiện $|u| \geq 2$ thì:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = u^3 - 3u.$$

- Tương tự, đặt $v = y + \frac{1}{y}$ điều kiện $|v| \geq 2$ thì $y^3 + \frac{1}{y^3} = v^3 - 3v$

Khi đó, hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^3 + v^3 - 3(u + v) = 15m - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 8 - m \end{cases}$$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình:

$t^2 - 5t + 8 - m = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 8 = m.$ (1)

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiện thực thoả mãn $|t| \geq 2$.

Xét hàm số $y = t^2 - 5t + 8$ trên tập $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, ta có:

$$y' = 2t - 5,\ y' = 0 \Leftrightarrow 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2	2		$5/2$		$+\infty$
y'		$-$			$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	22	2	$\searrow$	$7/4$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số suy ra hệ có nghiệm khi và chỉ khi:

$\frac{7}{4} < m < 2$ hoặc $m > 22$.

Vậy, với $\frac{7}{4} < m < 2$ hoặc $m > 22$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu III.

1. Tam giác OAB có trọng tâm G(0; 2; 2).

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } G \\ \text{vtcp } \vec{u} = \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } G(0;2;2) \\ \text{vtcp } \vec{u}(2; -1; 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. Chuyển phương trình đường thẳng (Δ) về dạng tham số:

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Điểm M thuộc đường thẳng (Δ) nên M(1 − t; t − 2; 2t), khi đó:

$MA^2 + MB^2 = (-t)^2 + (t-6)^2 + (2t-2)^2 + (2-t)^2 + (t-4)^2 + (2t-4)^2$

$= 12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 + 28 \geq 28.$

Vậy, ta có $(MA^2 + MB^2)_{Min} = 28$, đạt được khi:

$t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M(-1; 0; 4)$

Câu IV.

1. Đặt: $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^3.dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln x.dx}{x} \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$.

Khi đó: $V = \dfrac{x^4}{4}.\ln^2 x\Big|_1^e - \dfrac{1}{2}\int_1^e x^3.\ln x dx = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{1}{2}\underbrace{\int_1^e x^3.\ln x dx}_{I}.$ (1)

Với I, ta đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3.dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$.

Khi đó: $I = \dfrac{x^4}{4}.\ln x\Big|_1^e - \dfrac{1}{4}\int_1^e x^3.dx = \dfrac{e^4}{4} - \dfrac{x^4}{16}\Big|_1^e = \dfrac{3e^4+1}{16}.$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được $I = \dfrac{5e^4 - 1}{32}$.

2. Biến đổi bất đẳng thức về dạng:

$$\frac{\left(4^a+1\right)^b}{2^{ab}} \leq \frac{\left(4^b+1\right)^a}{2^{ab}} \Leftrightarrow \left(4^a+1\right)^b \leq \left(4^b+1\right)^a. \quad (*)$$

Lấy loga hai vế của (*), ta được:

$$\ln\left(4^a+1\right)^b \leq \ln\left(4^b+1\right)^a \Leftrightarrow b.\ln\left(4^a+1\right) \leq a.\ln\left(4^b+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(4^a+1\right)}{a} \leq \frac{\ln\left(4^b+1\right)}{b}. \quad (**)$$

Xét hàm số $y = \dfrac{\ln\left(4^x+1\right)}{x}$ trên D = (0; +∞), ta có:

$$y' = \frac{4^x.\ln 4^x - \left(4^x+1\right)\ln\left(4^x+1\right)}{x^2\left(4^x+1\right)} < 0 \Rightarrow$$ Hàm số nghịch biến trên D

$\Rightarrow y(a) < y(b)$ và đó là điều cần chứng minh.

Câu V.a.

1. Ta lần lượt thực hiện:

   - Trong khai triển:

$$x(1-2x)^5 = x\sum_{k=0}^{5} C_5^k(-2x)^k = x\sum_{k=0}^{5} C_5^k(-2)^k x^k.$$

   Hệ số của x^5 trong khai triển trên là $C_5^4(-2)^4$.

   - Trong khai triển:

$$x^2(1+3x)^{10} = x^2\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k(3x)^k = x^2\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 3^k x^k$$

   Hệ số của x^5 trong khai triển trên là $C_{10}^3 3^3$.

   Vậy, hệ số của x^5 là: $C_5^4(-2)^4 + C_{10}^3 3^3 = 3320$.

2. Đường tròn (C) có tâm I(1 ; −2) và bán kính R = 3.

   Ta có nhận xét:

$$\Delta PAB \text{ đều} \Leftrightarrow \widehat{APB} = 60^0 \Leftrightarrow \widehat{API} = 30^0 \Leftrightarrow IP = 2IA = 2R - \text{không đổi}$$

$$\Leftrightarrow P \text{ thuộc đường tròn (C') tâm I bán kính } 2R.$$

   Như vậy P là giao điểm của (C') và (d).

   Khi đó, để có duy nhất một điểm P điều kiện là (d) tiếp xúc với (C'), suy ra:

$$d(I,(d)) = 2R \Leftrightarrow \frac{|3.1-4.(-2)+m|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 6 \Leftrightarrow |m+11| = 30$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m+11=30 \\ m+11=-30 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=19 \\ m=-41 \end{bmatrix}.$$

   Vậy, với m = 19 hoặc m = −41 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu V.b.

1. Điều kiện $4.2^x - 3 > 0$. (*)

   Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\log_2(4^x + 15.2^x + 27) - 2\log_2(4.2^x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4^x + 15.2^x + 27) = \log_2(4.2^x - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} + 15.2^x + 27 = 16.2^{2x} - 24.2^x + 9$$

$$\Leftrightarrow 15.2^{2x} - 39.2^x - 18 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ ta được:

$$5t^2 - 13t - 6 = 0 \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t = 3 \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \log_2 3$.

2. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

c. Chứng minh rằng ΔSCD vuông.

Gọi I là trung điểm của AD, ta có:

$$IA = IB = IC = a \Rightarrow \Delta ACD \text{ vuông tại } C \Rightarrow CD \perp AC.$$

Mặt khác, ta có:

$$CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \Delta SCD \text{ vuông tại C.}$$

d. Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Nhận xét rằng BH cắt mặt phẳng (SCD) tại S, do đó:

$$\frac{d(H, (SCD))}{d(B, (SCD))} = \frac{SH}{SB} \Leftrightarrow d(H, (SCD)) = \frac{SH}{SB}.d(B, (SCD)).$$

Ta lần lượt có:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}.$$

$$V_{B.SCD} = \frac{1}{3}d(B, (SCD)).S_{\Delta SCD} \Leftrightarrow d(B, (SCD)) = \frac{3V_{B.SCD}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{SA.S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta SCD}}.$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}a^2.$$

$$S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}SC.CD = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2}.\sqrt{IC^2 + ID^2} = a^2\sqrt{2}.$$

Từ đó, suy ra $d(H, (SCD)) = \frac{a}{3}$.

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2006

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I: (2 điểm)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.
2. Tìm m để phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình:

$$\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x.\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0.$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

Câu III: (2 điểm): Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A'(0; 0; 1). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C và tạo với mặt phẳng Oxy một góc α biết $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Câu IV: (2 điểm)

1. Tính tích phân:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x.dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}.$$

2. Cho hai số thực $x \neq 0$, $y \neq 0$ thay đổi và thoả mãn điều kiện

$$(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

PHẦN TỰ CHỌN

Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho các đường thẳng:

$$(d_1): x + y + 3 = 0, (d_2): x - y - 4 = 0, (d_3): x - 2y = 0.$$

Tìm điểm M nằm trên đường thẳng (d_3) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng (d_1) bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng (d_2).

2. Tính hệ số của x^{26} trong khai triển nhị thức Niutơn $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$, biết rằng:

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$$

(n nguyên dương, C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử).

Câu V.b Theo chương trình THPT phân ban (2 điểm)

1. Giải phương trình $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$.
2. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích khối tứ diện OO'AB.

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Tham khảo định hướng trong câu I.1 của đề toán khối A – 2002.
2. Yêu cầu này nằm trong câu hàm số bao giờ cũng được thực hiện dựa trên kết quả của việc khảo sát hàm số, nó có tên là "*Sử dụng đồ thị hàm số biện luận số nghiệm của phương trình*", do đó công việc cần thực hiện là:

   Bước 1: Biến đổi phương trình về dạng:

   $$2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4. \qquad (1)$$

   Bước 2: Phương trình ban đầu có 6 nghiệm phân biệt khi phương trình (1) có 6 nghiệm phân biệt, tức là khi đường thẳng $y = m - 4$ cắt đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$ tại 6 điểm phân biệt.

   Bước 3: Đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$ được suy ra từ đồ thị hàm số trong câu 1 (ký hiệu là (C)) bằng cách:
   - Giữa nguyên phần đồ thị của (C) ở bên phải Oy.
   - Lấy đối xứng phần đồ thị trên qua Oy.

   Bước 4: Kết luận.

Câu II.

1. Phương trình ở dạng $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, do đó các bước thực hiện bao gồm:

   Bước 1: Thiết lập điều kiện có nghĩa cho phương trình $g(x) \neq 0$. (*)

   Bước 2: Phương trình được biến đổi về dạng:

   $$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x.\cos x = 0.$$

   Đây là phương trình lượng giác hỗn hợp chứa các biểu thức đối xứng với $\sin^{2n}x$ và $\cos^{2n}x$, nên ta sử dụng phép biến đổi:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3(\sin^2 x + \cos^2 x)\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x,$$

$$\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x .$$

Từ đó, nhận được một phương trình bậc hai đối với sin2x.

Bước 3: Giải phương trình và kết hợp với (*), để nhận được nghiệm đúng của phương trình.

2. Đây là hệ phương trình chứa căn bậc hai, do đó các bước thực hiện bao gồm:

Bước 1: Thiết lập điều kiện có nghĩa cho hệ. (*)

Bước 2: Nhận xét rằng hệ có dạng đối xứng loại I lên cách giải trong dạng chính tắc là dựa vào ẩn phụ u = x + y và v = xy.

Tuy nhiên, dựa trên tính đặc thù của hệ chúng ta sẽ sử dụng ẩn phụ $v = \sqrt{xy}$ để khử căn cho phương trình thứ nhất.

Từ đó, bằng một vài phép biến đổi đại số kết hợp với phép thế chúng ta sẽ nhận được phương trình một ẩn (theo u hoặc v) từ phương trình thứ hai của hệ.

Bước 3: Kết hợp với (*), nhận được nghiệm đúng của hệ phương trình.

Câu III. Đây là dạng toán liên quan tới kiến thức về phương pháp toạ độ trong không gian với hhệ toạ độ được thiết lập cho hình lập phương, do đó các bước thực hiện bao gồm:

Bước 1: Chỉ ra được toạ độ đúng cho điểm C.

Bước 2: Khi đó:

1. Với câu 1), chúng ta sử dụng ngay công thức:

$$d(A'C, MN) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}\right].\overrightarrow{A'M}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}\right]\right|}$$

2. Với câu 2), chúng ta sử dụng phương trình tổng quát của mặt phẳng:

(P): Ax + By + Cz + D = 0, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Tiếp theo, bằng việc sử dụng các điều kiện (P) đi qua A', C và tạo với mặt phẳng Oxy một góc α biết $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ để tìm được cách biểu diễn ba trong bốn ẩn số A, B, C, D theo một ẩn còn lại.

Câu IV.

1. Đây là tích phân hàm số lượng giác, chúng ta sử dụng nhận xét:

$(\cos^2 x)' = -2\sin x.\cos x = -\sin 2x,$

$(\sin^2 x)' = 2\cos x.\sin x = \sin 2x,$

điều đó dẫn tới việc sử dụng ẩn phụ $t = \cos^2 x + 4\sin^2 x$ để tính tích phân đã cho.

2. Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến dựa trên điều kiện cho trước, và để thực hiện được nó các em học sinh cần biết linh hoạt trong việc đánh giá đồng thời hai biểu thức, cụ thể:

- Cần biến đổi biểu thức điều kiện $(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy$ về dạng giống các toán tử chứa trong A, nên chúng ta thực hiện chia hai vế của biểu thức cho x^2y^2 để nhận được:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{xy}. \qquad (*)$$

- Khi đó:

$$A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2.$$

- Tới đây, công việc của chúng ta được thu gọn về việc tìm giá trị lớn nhất của $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, và để thực hiện nó đương nhiên cần tận dụng (*).

  Các em học sinh hãy thử sức dựa trên bất đẳng thức:

$$\frac{1}{xy}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$$

và kiến thức về tam thức bậc hai.

Câu V.a.

1. Với yêu cầu *tìm điểm thuộc đường thẳng* (d) *thoả mãn điều kiện* K, ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Tận dụng phương trình đường thẳng (d) cho trước.

Cách 1: Nếu đường thẳng (d) cho dưới dạng tham số:

$$(d):\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\end{cases},\ t\in\mathbf{R}.$$

Bước 1: Lấy điểm $M \in (d)$, suy ra $M(x_0 + a_1t, y_0 + a_2t)$.

Bước 2: Dựa vào điều kiện K xác định t.

Cách 2: Nếu đường thẳng (d) cho dưới dạng tổng quát:

$(d): Ax + By + C = 0$, với $A^2 + B^2 > 0$.

Bước 1: Lấy điểm $M(x_M, y_M) \in (d)$, suy ra

$Ax_M + By_M + C = 0$.

Bước 2: Sử dụng điều kiện K thiết lập thêm một phương trình cho x_M và y_M. Từ đó tìm được toạ độ của M.

☞ ***Lưu ý***: Khi đó cũng có thể chuyển phương trình (d) về dạng tham số để sử dụng cách 1.

Hướng 2: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó

$$(d) \cap (L) = \{M\}.$$

2. Từ yêu cầu của bài toán chúng ta thấy có hai phần việc phải thực hiện:

Phần 1: Tìm n từ biểu thức điều kiện:

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$$

xuất phát từ các đẳng thức cơ bản:

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n+1} \text{ và } C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}, \forall k, 0 \le k \le 2n+1$$

Từ đó, chúng ta biến đổi:

$$2^{20} = 1 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n$$

$$= \frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.2^{2n+1}$$

$\Rightarrow$ Giá trị của n.

Phần 2: Tính hệ số của x^{26} trong khai triển nhị thức Niutơn:

$$\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^{-4})^{n-k}.(x^7)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{11k-4n}$$

Hệ số của x^{26} là C_n^k với k thoả mãn:

$11k - 4n = 26 \Rightarrow$ Giá trị của k $\Rightarrow$ Giá trị của C_n^k.

Câu V.b.

1. Nhận xét rằng $8^x = 2^{3x}$, $12^x = 3^x.2^{2x}$, $18^x = 3^{2x}.2^x$, $27^x = 3^{3x}$ do đó bằng chia hai vế của phương trình cho 8^x hoặc 27^x chúng ta sẽ nhận được một phương trình bậc ba ẩn $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ hoặc $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $(t > 0)$.

   Và với phương trình bậc ba các em học sinh cần có kiến thức trong việc nhẩm nghiệm để thực hiện phân tích đa thức thành nhân tử.
2. Công việc tính thể tích khối tứ diện OO'AB hoàn toàn được thực hiện khi các em lựa chọn được đỉnh, để từ đó xác định ra đường cao và đáy.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2006

Câu I.

1. *Bạn đọc tự làm và vẽ đồ thị.*
2. Biến đổi phương trình về dạng:

$$2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4. \qquad (1)$$

Phương trình ban đầu có 6 nghiệm phân biệt khi (1) có 6 nghiệm phân biệt, tức là khi đường thẳng $y = m - 4$ cắt đồ thị hàm số

$$y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 \text{ tại 6 điểm phân biệt.}$$

Đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$ được suy ra từ đồ thị hàm số trong câu I (ký hiệu là (C)) bằng cách:

- Giữa nguyên phần đồ thị của (C) ở bên phải Oy.
- Lấy đối xứng phần đồ thị trên qua Oy.

Từ đồ thị suy ra điều kiện để phương trình có 6 nghiệm phân biệt là:

$$0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5.$$

Vậy, với $4 < m < 5$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu II.

1. Điều kiện: $\sqrt{2} - 2\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (*)

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3(\sin^2 x + \cos^2 x)\sin^2 x.\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{3}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -4 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với (*), ta nhận được nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. Điều kiện:

$$\begin{cases} xy \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \geq 0 \\ x \geq -1. \\ y \geq -1 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{xy}$ $(t > 0)$, khi đó:

- Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ về dạng:

$$x + y - t = 3 \Leftrightarrow x + y = t + 3.$$

- Biến đổi phương trình thứ hai của hệ về dạng:

$$x + 1 + y + 1 + 2\sqrt{(x+1)(y+1)} = 16$$

$$\Leftrightarrow x + y + 2 + 2\sqrt{xy + x + y + 1} = 16$$

$$\Leftrightarrow t + 3 + 2 + 2\sqrt{t^2 + t + 3 + 1} = 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2 + t + 4} = 11 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 - t \geq 0 \\ 4(t^2 + t + 4) = (11 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 11 \\ 3t^2 + 26t - 105 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3.$$

- Hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases}$$

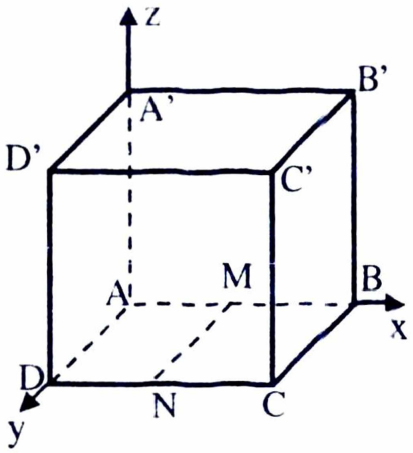
tức x, y là nghiệm của phương trình:

$u^2 - 6u + 9 = 0 \Leftrightarrow u = 3 \Rightarrow x = y = 3$ thoả mãn điều kiện (*).

Vậy, hệ có nghiệm (3; 3).

Câu III. Từ giả thiết suy ra:

$$C(1; 1; 0),\ M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right),\ N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right).$$



1. Khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN được cho bởi:

$$d(A'C, MN) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}\right].\overrightarrow{A'M}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}\right]\right|}$$

trong đó:

$$\overrightarrow{A'C}(1; 1; -1),\ \overrightarrow{MN}(0; 1; 0),\ \overrightarrow{A'M}\left(\frac{1}{2}; 0; -1\right),\ \left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}\right] = (1; 0; 1)$$

suy ra:

$$d(A'C, MN) = \frac{\left|1.\frac{1}{2} + 0.0 + 1.(-1)\right|}{\sqrt{1^2 + 0 + 1^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

2. Giả sử pặt phẳng (P) phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. (1)

Vì (P) đi qua hai điểm A', C nên:

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ A + B + D = 0 \end{cases} \Rightarrow C = -D = A + B.$$

Gọi $\overrightarrow{n_P}$, $\vec{k}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (P), (Oxy), ta có:

$\overrightarrow{n_P}(A; B; C)$, $\vec{k}(0; 0; 1)$

Từ giả thiết, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow 6(A + B)^2 = A^2 + B^2 + (A + B)^2$$

$$\Leftrightarrow 2A^2 + 5AB + 2B^2 = 0 \Leftrightarrow (2A + B)(A + 2B) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B = -2A \\ A = -2B \end{bmatrix}.$$

Khi đó:

- Với $B = -2A$ thì $C = -A$, $D = A$, thay vào (1) ta được:

$$(P_1): Ax - 2Ay - Az + A = 0 \Leftrightarrow (P_1): x - 2y - z + 1 = 0.$$

- Với $A = -2B$ thì $C = -B$, $D = B$, thay vào (1) ta được:

$$(P_2): -2Bx + By - Bz + B = 0 \Leftrightarrow (P_2): 2x - y + z - 1 = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu IV.

1. Đặt $t = \cos^2 x + 4\sin^2 x$, suy ra

$$dt = (-2\sin x.\cos x + 8\cos x.\sin x)dx = 3\sin 2x.dx \Leftrightarrow \sin 2x.dx = \frac{1}{3}dt.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $t = 1$.
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 4$.

Khi đó: $I = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\sqrt{t}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}$.

2. Từ giả thiết: $(x + y)xy = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy}$.

Khi đó, bằng đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$ ta nhận được điều kiện:

$$a + b = a^2 + b^2 - ab \Leftrightarrow a + b = (a + b)^2 - 3ab \geq (a + b)^2 - 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 - 4(a + b) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a + b \leq 4.$$

Từ đó: $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^2 \leq 16$.

Vậy, ta có $A_{Max} = 16$ đạt được khi:

$$\begin{cases} a = b \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = 2 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Câu V.a.

1. Vì M thuộc (d_3) nên $M(2t; t)$, khi đó để khoảng cách từ M đến đường thẳng (d_1) bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng (d_2) điều kiện là:

$$\frac{|2t + t + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2|2t - t - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow |3t + 3| = 2|t - 4|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t + 3 = 2(t - 4) \\ 3t + 3 = 2(4 - t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -11 \\ t = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(-22; -11) \\ M_2(2; 1) \end{array}\right.$$

Vậy, tồn tại hai điểm M_1, M_2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

2. Ta có: $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}$, $\forall k,\ 0 \le k \le 2n+1$

suy ra: $2^{20} = 1 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n$

$$= C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^n = \frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}\right)$$

sử dụng khai triển: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}$

ta được: $2^{20} = 2^{2n} \Leftrightarrow 2n = 20 \Leftrightarrow n = 10$.

Từ đó: $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^{-4})^{10-k}.(x^7)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{11k-40}$

Hệ số của x^{26} là C_{10}^k với k thoả mãn: $11k - 40 = 26 \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy, hệ số của x^{26} trong khai triển bằng $C_{10}^6 = 240$.

Câu V.b.

1. Biến đổi phương trình về dạng: $3\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 2 = 0$.

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $(t > 0)$ ta được phương trình:

$$3t^3 + 4t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(3t^2 + t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$$

$\Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

2. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

Ta lần lượt thực hiện:

- Kẻ đường sinh AA'.
- Gọi D là điểm đối xứng với A' qua O' và H là hình chiếu của B trên A'D.

Ta có: $\begin{cases} BH \perp A'D \\ BH \perp A'A \end{cases} \Rightarrow BH \perp (AOO')$.

Khi đó: $V_{OO'AB} = \frac{1}{3} BH.S_{\Delta AOO'} = \frac{1}{6} BH.AO.OO'$. (1)

trong đó: $AO = OO' = a$. (2)

$$BD^2 = A'D^2 - A'B^2 = A'D^2 - (AB^2 - A'A^2) = 4a^2 - (4a^2 - a^2) = a^2$$

$$\Leftrightarrow BD = a \Rightarrow \Delta O'BD \text{ đều} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được: $V_{OO'AB} = = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ ĐỂ LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 6$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Biện luận theo a số nghiệm của phương trình $|x^3 - 3x^2 - 6| = a$.

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số .

b. Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = \left|\dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}\right|$.

Bài 3: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x - 2$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $|x^3 - 3x| + m - 2 = 0$.

Bài 4: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{x - 2}$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2 - 5|x|}{|x| - 2} = m$.

Bài 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Từ đó biện luận theo m số nghiệm của phương trình $|x|(x^2 - 3) = m$.

Bài 6: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $|x - 1|^3 - 3(x - 1)^2 + 1 = m$.

Bài 7: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = ||x|^3 - 3x^2 + 4|x| - 2|$.

Bài 8: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = |x - 1|(2x^2 - x - 1)$.

Bài 9: Cho hàm số $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x + 2}$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\dfrac{(x - 1)^2}{|x + 2|} = m$.

Bài 10: Cho hàm số $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b. Từ đó suy ra đường biểu diễn đường cong $|y| = \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$.

Bài 11: Giải các phương trình sau:

a. $\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = \sin 2x$.

b. $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{13}{8}\cos^2 2x$.

c. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$.

Bài 12: Cho phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x = m.\sin 2x - \frac{1}{2}$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Chứng minh rằng với mọi m thoả mãn $|m| \geq 1$ phương trình luôn có nghiệm.

Bài 13: Cho phương trình: $\sin^6 x + \cos^6 x = m.\sin 2x$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài 14: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin^2 4x = m.$$

Bài 15: Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, tìm $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ thoả mãn phương trình:

$$\sin^n x + \cos^n x = 2^{\frac{2-n}{2}}.$$

Bài 16: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

b. $\begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Bài 17: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

b. $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Bài 18: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Bài 19: Cho bốn điểm A(1; 6; 2), B(4; 0; 6), C(5; 0; 4), D(5; 1; 3).

a. Chứng minh rằng bốn điểm đó không đồng phẳng.

b. Tính thể tích tứ diện ABCD.

c. Viết phương trình mặt phẳng (BCD).

d. Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (BCD). Tìm toạ độ tiếp điểm.

Bài 20: Cho các điểm A(a; 0; 0), B(0; a; 0), C(a; a; 0), D(0; 0; d), với a, d > 0. Gọi A_1, B_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của O xuống các đường thẳng DA, DB.

a. Lập phương trình mặt phẳng chứa các đường thẳng OA_1, OB_1. Chứng minh rằng mặt phẳng đó vuông góc với đường thẳng CD.

b. Tính d theo a để góc $\widehat{A_1OB_1}$ có số đo bằng 45^0.

Bài 21: Cho ba điểm $H(\frac{1}{2}, 0, 0)$; $K(0, \frac{1}{2}, 0)$; $I(1, 1, \frac{1}{3})$.

a. Viết phương trình giao tuyến của (HIK) với mặt phẳng x + z = 0 ở dạng chính tắc.

b. Tính cosin của góc phẳng tạo bởi mặt phẳng (HIK) với mặt toạ độ Oxy.

Bài 22: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm A(2; 0; 0), A'(6; 0; 0), B(0; 3; 0), B'(0; 4; 0), C(0; 0; 4) và C'(0; 0; 3).

a. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, A'', B, C. Chứng minh rằng B' và C' cùng nằm trên mặt cầu đó.

b. Chứng minh rằng trực tâm H của ΔABC, trọng tâm G của ΔA'B'C' cùng nằm trên một đường thẳng đi qua O. Viết phương trình đường thẳng đó.

c. Tính khoảng cách từ điểm O tới giao tuyến của mặt phẳng (ABC') và mặt phẳng (A'B'C).

Bài 23: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm A(1; −3; −1), B(−2; 1; 3).

a. Chứng tỏ rằng hai điểm A và B cách đều trục Ox.

b. Tìm điểm C trên trục Oz sao cho ΔABC vuông tại C.

c. Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng AB trên (Oyz).

d. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm O, A, B và có tâm nằm trên (Oxy).

Bài 24: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm A(4; −1; 2), B(1; 2; 2) và C(1; −1; 5).

a. Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

b. Viết phương trình mặt phẳng (ABC). Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi mặt phẳng (ABC) và các mặt phẳng tọa độ.

c. Viết phương trình trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

d. Tìn tọa độ điểm D sao cho ABCD là tứ diện đều.

Bài 25: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 3x)\sin 3x.dx$.

b. $\int_0^{\pi} 5(5-4\cos t)^{\frac{1}{4}} \sin t.dt$.

Bài 26: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x.dx}{\cos^2 x}$.

b. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x.dx}{1+\sin x}$.

Bài 27: Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x.dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.

b. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x.\cos^3 x.dx}{1+\cos^2 x}$.

Bài 28: Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin 2x.dx}{2\sin^2 x+\cos^2 x}$.

b. $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos 2x}$.

Bài 29: Cho đường thẳng (d) có phương trình: (d): $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3+t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

Tìm điểm M thuộc (d) và cách điểm A(0, 1) một khoảng bằng 5.

Bài 30: Cho đường thẳng (d) có phương trình:

(d): $x - 2y + 15 = 0$.

Tìm trên đường thẳng điểm $M(x_M, y_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

Bài 31: Cho hai điểmA(0, 2), B(2, – 2) và đường thẳng (d) có phương trình:

(d): $x - y - 1 = 0$.

Tìm trên đường thẳng điểm M trên (d) sao cho MA + MB nhỏ nhất.

Bài 32: Cho ΔABC cân tại A, biết phương trình cạnh AB có dạng:

(AB): $3\sqrt{7}\,x - y - 3\sqrt{7} = 0$,

điểm B, C thuộc trục hoành và A thuộc góc phần tư thứ nhất.

a. Xác định toạ độ các đỉnh của ΔABC, biết rằng p = 9.

b. Tìm toạ độ điểm $M \in AB$ và $N \in BC$ sao cho đường thẳng MN đồng thời chia đôi chu vi và chia đôi diện tích của ΔABC.

Bài 33: Trong khai triển nhị thức $(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}})^n$ hãy tìm số hạng không phụ thuộc x, biết $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$.

Bài 34: Trong khai triển $\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{5}\right)^{124}$ có bao nhiêu số hạng hữu tỉ?

Bài 35: Cho đa thức $P(x) = (1 + x)^9 + (1 + x)^{10} + ... + (1 + x)^{14}$.

Có khai triển $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{14}x^{14}$. Tính hệ số a_9.

Bài 36: Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2 + 1)^n$ bằng 1024, hãy tìm hệ số $a \in N$ của số hạng $a.x^{12}$ trong khai triển.

Bài 37: Đặt $(1 + x + x^2 + x^3)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{15}x^{15}$.

a. Tính hệ số a_{10}.

b. Tổng $S_1 = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{15}$.

c. Tổng $S_2 = a_0 - a_1 + a_2 - ... - a_{15}$.

Bài 38: Xác định số n sao cho trong khai triển nhị thức $(x + 2)^n$ hạng tử thứ 11 là số hạng tử có hệ số lớn nhất.

Bài 39: Khai triển đa thức $P(x) = (1 + 2x)^{12}$ thành dạng:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{20}x^{20}.$$

Tìm $\max(a_1, a_2, ..., a_{12})$.

Bài 40: Với n, k là số nguyên dương và $1 \le k \le n$, chứng minh rằng:

$$C_n^0 C_n^k - C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} - ... + (-1)^k C_n^k C_0^{n-k} = 0.$$

Bài 41: Giải các phương trình sau:

a. $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}$.

b. $4^{\ln x + 1} - 6^{\ln x} - 2.3^{\ln x^2 + 2} = 0$.

Bài 42: Giải các phương trình sau:

a. $\lg^2 x^3 - 20\lg\sqrt{x} + 1 = 0$.

b. $\dfrac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \dfrac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$.

c. $\log_{9x}27 - \log_{3x}3 + \log_9 243 = 0$.

Bài 43: Giải các phương trình sau:

a. $\log_3(3^x - 1).\log_3(3^{x+1} - 3) = 12$.

b. $\log_{x-1}4 = 1 + \log_2(x - 1)$.

Bài 44: Giải phương trình $2^{3x} - 6.2^x - \dfrac{1}{2^{3(x-1)}} + \dfrac{12}{2^x} = 1$.

Bài 45: Cho phương trình:

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + m(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4.$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn

$$x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}}3.$$

Bài 46: Cho hình hộp với sáu mặt đều là hình thoi cạnh bằng a, góc nhọn bằng 60^0. Tính thể tích của hình hộp.

Bài 47: Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, điểm A' cách đều ba điểm A, B, C, cạnh bên AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0.

a. Tính thể tích của khối lăng trụ đó.

b. Chứng minh rằng mặt phẳng bên BCC'B' là một hình chữ nhật.

c. Tính tổng diện tích các mặt bên của hình lăng trụ ABC.A'B'C' (tổng đó gọi là diện tích xung quanh của hình (hoặc khối) lăng trụ đã cho).

Bài 48: Cho khối chóp S.ABC có đường cao SA = a, đáy là tam giác vuông cân AB = BC = a. Gọi B' là trung điểm của SB, C' là chân đường cao hạ từ A của ΔSAC.

a. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

b. Chứng minh rằng SC vuông góc với mặt phẳng (AB'C').

c. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'.

Bài 49: Khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành, M là trung điểm cạnh SC. Mặt phẳng (P) đi qua AM, song song với BD, chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Bài 50: Cho khối lăng trụ đều ABC.A'B'C' và M là trung điểm của cạnh AB. Mặt phẳng (B'C'M) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của phần đó.

ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

Bài 1:

a. *Bạn đọc tự làm.*

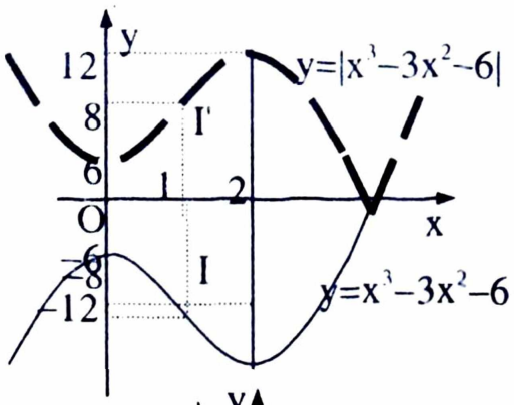
b. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đường thẳng y = a với đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 6|$.

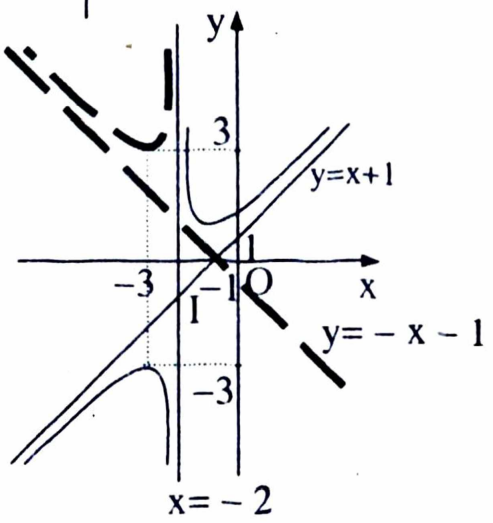
Đồ thị hàm số:

$$y = |x^3 - 3x^2 - 6| = |f(x)|$$

gồm:

1. Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị y = f(x).
2. Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành.





Biện luận:

- Với a < 0 phương trình vô nghiệm.
- Với a = 0 phương trình có một nghiệm.
- Với 0 < a < 6 hoặc a > 12 phương trình có hai nghiệm.
- Với a = 6 hoặc a = 12 phương trình có ba nghiệm.
- Với 6 < a < 12 phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Bài 2:

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Đồ thị $y = |f(x)|$ gồm:

1. Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y = f(x)$.
2. Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Bài 3:

a. Ta lần lượt có:

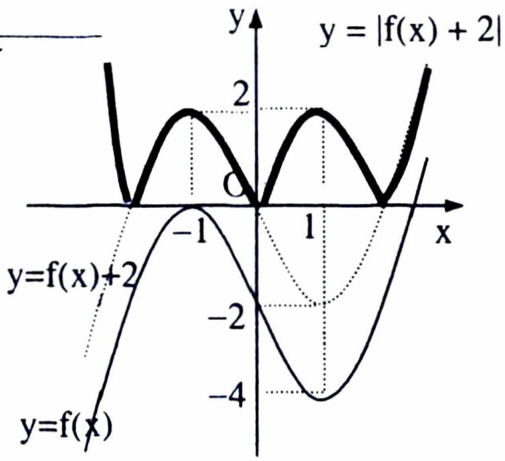
Miền xác định $D = \mathbf{R}$.

Đạo hàm cấp một:

$y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗	CĐ 0	↘	CT −4	↗	



Đạo hàm cấp hai:

$y'' = 6x$,

$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		−	0	+	
		∩	U −2	∪	

Giới hạn:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} [x^3(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}) = \begin{cases} +\infty \text{ khi } x \to +\infty \\ -\infty \text{ khi } x \to -\infty \end{cases}.$$

Bảng tổng kết:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−		−	0	+	
y''					0	+			
y	$-\infty$	↗	CĐ 0	↘	U −2	↘	CT −4	↗	$+\infty$

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$|f(x) + 2| = 2 - m. \qquad (1)$$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x) + 2|$ với đường thẳng $y = 2 - m$.

Đồ thị $y = |f(x) + 2|$ được suy ra từ đồ thị $y = f(x)$ bằng cách:

- Tịnh tiến theo Oy lên trên 2 đơn vị, ta được đồ thị $y = f(x) + 2$.
- Khi đó đồ thị hàm số $y = |f(x) + 2|$ gồm:
  1. Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y = f(x) + 2$.
  2. Lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của đồ thị $y = f(x)+2$ qua trục hoành.

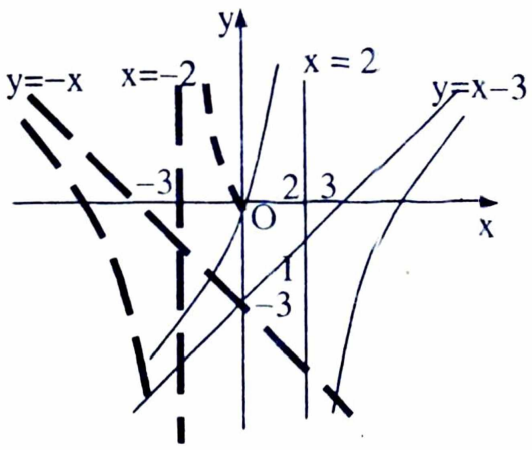
Biện luận:

- Với $2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$, phương trình vô nghiệm.
- Với $2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$, phương trình có ba nghiệm.
- Với $0 < 2 - m < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 2$, phương trình có sáu nghiệm.
- Với $2 - m = 2 \Leftrightarrow m = 0$, phương trình có bốn nghiệm.
- Với $2 - m > 2 \Leftrightarrow m < 0$, phương trình có hai nghiệm.

Bài 4:

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ với đường thẳng $y = m$.



Đồ thị $y = f(|x|)$ gồm:

1. Phần bên phải Oy của đồ thị $y = f(x)$.
2. Đối xứng phần đồ thị trên qua Oy.

Biện luận:

- Với $m < 0$ phương trình có hai nghiệm.
- Với $m = 0$ phương trình có ba nghiệm.
- Với $m > 0$ phương trình có bốn nghiệm.

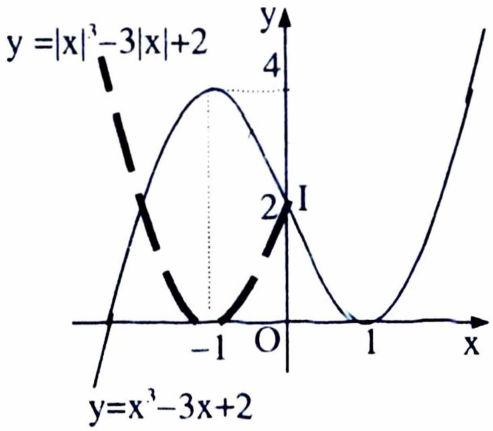
Bài 5:

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$|x|^3 - 3|x| + 2 = m + 2.$$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đường thẳng $y = m + 2$ với đồ thị hàm số $y = |x|^3 - 3|x| + 2 = f(|x|)$.



Đồ thị $y = f(|x|)$ gồm:

1. Phần bên phải Oy của đồ thị $y = f(x)$.
2. Đối xứng phần đồ thị trên qua Oy.

Biện luận:

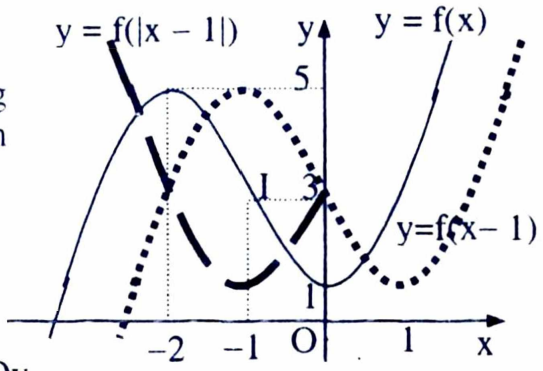
- Với $m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$ phương trình vô nghiệm.
- Với $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ phương trình có hai nghiệm.
- Với $0 < m + 2 < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 0$ phương trình có bốn nghiệm.
- Với $m + 2 = 2 \Leftrightarrow m = 0$ phương trình có ba nghiệm.
- Với $m + 2 > 2 \Leftrightarrow m > 0$ phương trình có hai nghiệm.

Bài 6:

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Số nghiệm của phương trình $|x-1|^3 - 3(x-1)^2 + 1 = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x-1|^3 - 3(x-1)^2 + 1 = f(|x-1|)$ với đường thẳng $y = m$.

Đồ thị $y = f(|x-1|)$ được suy ra từ đồ thị $y = f(x)$ theo hai bước:



Bước 1: Suy ra đồ thị $y = f(x-1)$ bằng phép tịnh tiến theo Ox đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang phải 1 đơn vị.

Bước 2: Suy ra đồ thị $y = f(|x-1|)$ gồm:

- Phần bên phải Oy của đồ thị $y = f(x-1)$.
- Đối xứng phần đồ thị trên qua Oy.

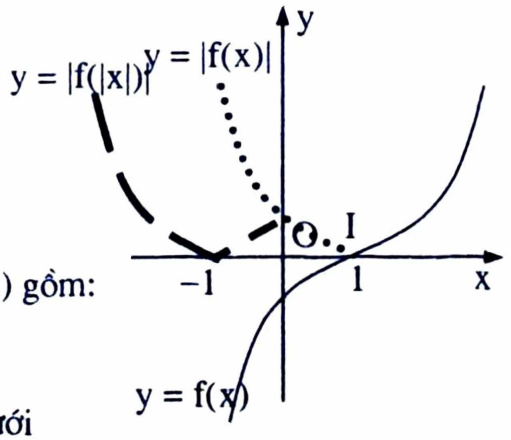
Biện luận:

- Với $m < 1$ phương trình vô nghiệm.
- Với $m = 1$ phương trình có 2 nghiệm.
- Với $1 < m < 3$ phương trình có 4 nghiệm.
- Với $m = 3$ phương trình có 3 nghiệm.
- Với $m > 3$ phương trình có 2 nghiệm.

Bài 7:

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Đồ thị hàm $y = ||x|^3 - 3x^2 + 4|x| - 2| = |f(|x|)|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ theo các bước:



Bước 1: Suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)| = g(x)$ gồm:

1. Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y = f(x)$.
2. Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Bước 2: Suy ra $y = |f(|x|)| = g(|x|)$ gồm:

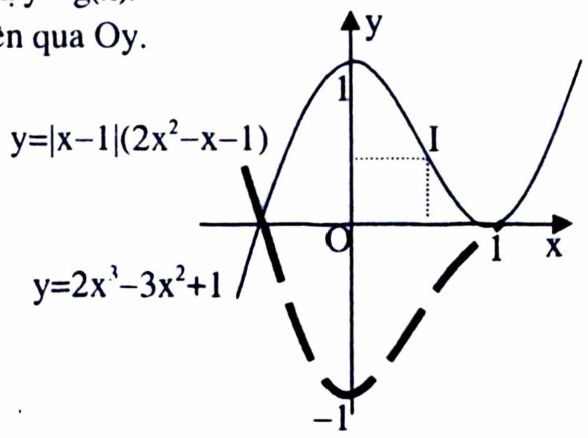
1. Phần bên phải Oy của đồ thị $y = g(x)$.
2. Đối xứng phần đồ thị trên qua Oy.

Bài 8:

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Ta có: $y = |x-1|(2x^2 - x - 1)$

$$= \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 1 \\ -f(x) & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$



Do đó đồ thị hàm số $y = |x-1|(2x^2 - x - 1)$ gồm:

1. Phần đồ thị $y = f(x)$ trên miền $x \geq 1$.
2. Đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ trên miền $x < 1$ qua trục hoành.

Bài 9:

a. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = f(x) = x - 4 + \frac{9}{x+2}.$$

Miền xác định $D = \mathbf{R}\backslash\{-2\}$.

Đạo hàm:

$$y' = 1 - \frac{9}{(x+2)^2},\ y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -5 \end{array}\right.$$

Giới hạn, tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$.

$\lim\limits_{x\to -2} y = \infty$ nên $x = -2$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to\infty} [y - (x-4)] = 0$ nên $y = x - 4$ là đường tiệm cận xiên.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	CĐ -12	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	CT 0	↗	$+\infty$

Đồ thị của hàm số.

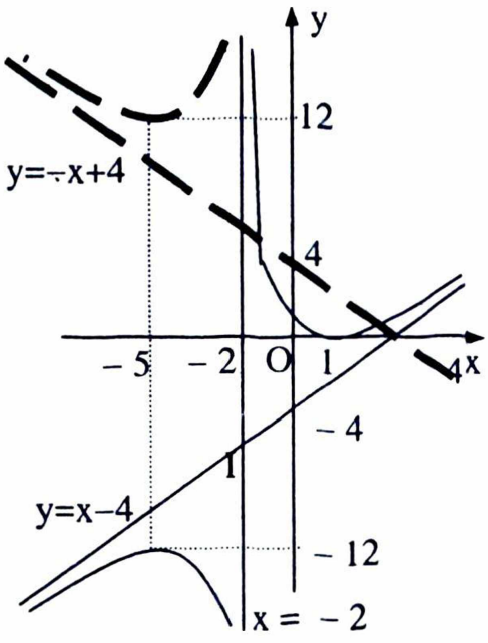
b. Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{(x-1)^2}{|x+2|}$ với đường thẳng $y = m$.

Ta có:

$$(C):\ y = \frac{(x-1)^2}{|x+2|} = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x > -2 \\ -f(x) & \text{khi } x < -2 \end{cases}.$$

Do đó đồ thị hàm số (C) gồm:

1. Phần từ đồ thị $y = f(x)$ trên miền $x > -2$.
2. Đối xứng phần từ đồ thị $y = f(x)$ trên miền $x < -2$ qua trục hoành.



Biện luận:

- Với $m < 0$ phương trình vô nghiệm.
- Với $m = 0$ phương trình có 1 nghiệm.
- Với $0 < m < 12$ phương trình có 2 nghiệm.
- Với $m = 12$ phương trình có 3 nghiệm.
- Với $m > 12$ phương trình có 4 nghiệm.

Bài 10:

a. Ta lần lượt có:

Miền xác định D = **R**.

Đạo hàm cấp một:

$$y' = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -5 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

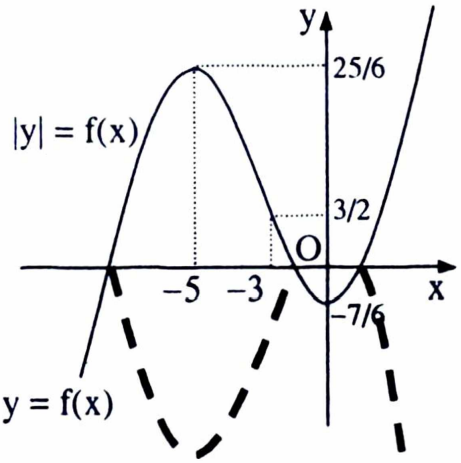
x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗	CĐ 25/6	↘	CT −7/6	↗	

Đạo hàm cấp hai:

$y'' = x + 3,\ y'' = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
y''		−	0	+	
y		∩	U 3/2	∪	



Giới hạn:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} [x^3(\frac{1}{6} + \frac{3}{2}.\frac{1}{x} + \frac{5}{2}.\frac{1}{x^2})$$

$$= \left[\begin{array}{l} +\infty \text{ khi } x \to +\infty \\ -\infty \text{ khi } x \to -\infty \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
y'		+	0	−		−	0	+	
y''			−		0	+			
y	$-\infty$	↗	CĐ 25/6	↘		∪	CT −7/6	↗	$+\infty$

b. Đường cong (C) gồm:

1. Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị y = f(x).
2. Đối xứng phần đồ thị phía trên trục hoành qua trục hoành.

Bài 11:

a. Ta có:

$$\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = (\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2})(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}) = \cos x.$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x = 2\sin x.\cos x \Leftrightarrow (1 - 2\sin x).\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

b. Ta có:

$$\cos^6 x - \sin^6 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^3 + 3(\cos^2 x - \cos^2 x)\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$= \cos^3 2x + \frac{3}{4}\cos 2x.\sin^2 2x = \cos^3 2x + \frac{3}{3}\cos 2x.(1 - \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}\cos^3 2x + \frac{3}{4}\cos 2x.$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{4}\cos^3 2x + \frac{3}{4}\cos 2x = \frac{13}{8}\cos^2 2x \Leftrightarrow (2\cos^2 2x - 13\cos 2x + 6)\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos 2x = \dfrac{1}{2}\\ \cos 2x = 6 \text{ loại}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

c. Ta có:

$$\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x$$

$$= [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x]^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x$$

$$= (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x = \frac{1}{8}\sin^4 2x - \sin^2 2x + 1$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{8}\sin^4 2x - \sin^2 2x + 1 = \frac{17}{16}(1 - \sin^2 2x) \Leftrightarrow 2\sin^4 2x + \sin^2 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 2x = \dfrac{1}{2}\\ \sin^2 2x = -1 \text{ loại}\end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Bài 12: Ta có:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = m.\sin 2x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 2x + 2m.\sin 2x - 3 = 0$$

Đặt $t = \sin 2x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$f(t) = t^2 + 2mt - 3 = 0.$ (2)

a. Với m = 1, ta được:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = -3 \text{ loại} \\ t = 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Nhận xét rằng:

$f(-1).f(1) = (1 + 2m - 3)(1 - 2m - 3) = -4(m^1 - 1) \le 0$ với $|m| \ge 1$

$\Leftrightarrow$ (2) luôn có nghiệm thuộc $[-1, 1] \Leftrightarrow$ (1) luôn có nghiệm.

Bài 13: Ta có:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3(\sin^2 x + \cos^2 x)\sin^2 x.\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = m.\sin 2x \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + 4m\sin 2x - 4 = 0.$$

Đặt $t = \sin 2x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó phương trình có dạng: $3t^2 + 4mt - 4 = 0.$ (2)

a. Với m = 1, ta được:

$$3t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = -2 \text{ loại} \\ t = \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{2}{3} = \sin 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x = 2\alpha + 2k\pi \\ 2x = \pi - 2\alpha + 2k\pi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \alpha + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k\pi \end{bmatrix}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, với m = 1 phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thuộc $[-1, 1]$

Nhận xét rằng phương trình (2) luôn có hai nghiệm $t_{1,2} = \frac{-2m \pm \sqrt{4m^2 + 12}}{3}$ nên một trong hai nghiệm sẽ bị loại. Tức (2) không thể có 2 nghiệm cùng thuộc $[-1; 1]$.

Do đó, điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là:

(2) có một nghiệm thuộc $[-1; 1] \Leftrightarrow f(-1).f(1) \le 0$

$$\Leftrightarrow (4m - 1)(-4m - 1) \le 0 \Leftrightarrow |m| \ge \frac{1}{4}.$$

Vậy, với $|m| \ge \frac{1}{4}$ phương trình có nghiệm.

Cách 2: Vì t = 0 không phải là nghiệm của (2) nên phương trình được viết lại:

$$\frac{4-3t^2}{t} = 4m.$$

Phương trình (1) có nghiệm

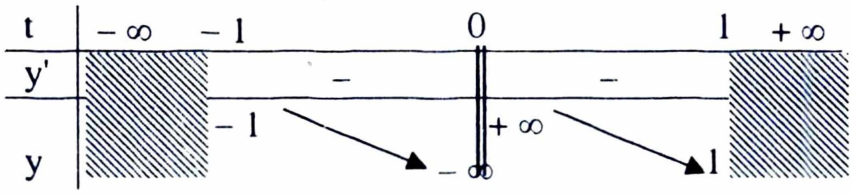
$\Leftrightarrow$ đường thẳng y = 4m cắt đồ thị hàm số $y = \frac{4-3t^2}{t}$ trên đoạn [− 1, 1].

Xét hàm số $y = \frac{4-3t^2}{t}$ trên đoạn [− 1, 1].

Đạo hàm

$$y' = \frac{-4-3t^2}{t^2} \cdot < 0 \Rightarrow$$ hàm số nghịch biến trên [− 1, 1].

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$\begin{bmatrix} 4m \le -1 \\ 4m \ge 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow |m| \ge \frac{1}{4}.$$

Vậy, với $|m| \ge \frac{1}{4}$ phương trình có nghiệm.

Bài 14: Ta có:

$$\sin^6x + \cos^6x = (\sin^2x + \cos^2x)^3 - 3(\sin^2x + \cos^2x)\sin^2x.\cos^2x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$\sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$\sin^2 4x = 4\sin^2 2x.\cos^2 2x = 4\sin^2 2x.(1 - \sin^2 2x) = 4\sin^2 2x. - 4\sin^4 2x$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$4(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x) - 4(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x) - (4\sin^2 2x - 4\sin^4 2x) = m$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^4 2x - 3\sin^2 2x = m$$

Đặt $t = \sin^2 2x$, điều kiện $0 \le t \le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$4t^2 - 3t = m. \qquad (2)$$

Phương trình ban đầu có nghiệm

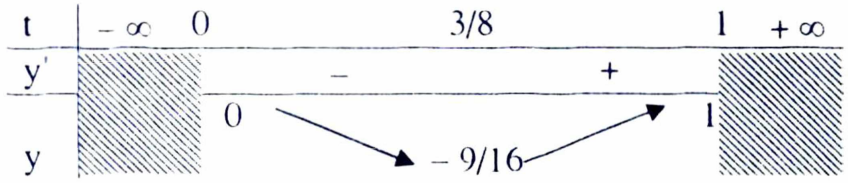
$\Leftrightarrow$ đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số $y = 4t^2 - 3t$ trên đoạn [0, 1].

Xét hàm số $y = 4t^2 - 3t$ trên đoạn [0, 1].

Đạo hàm:

$$y' = 8t - 3,\ y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{8}.$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là $-\frac{9}{16} \le 0 \le 1$.

Vậy, với $-\frac{9}{16} \le m \le 1$ phương trình có nghiệm.

Bài 15: Xét hàm số $f(x) = \sin^n x + \cos^n x$.

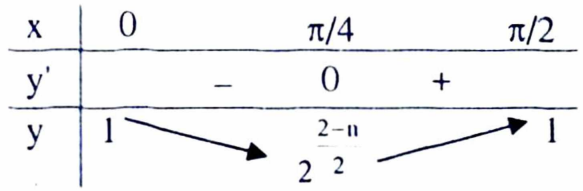
Miền xác định $D = (0, \frac{\pi}{2})$.

Đạo hàm:

$y' = n\cos x\sin^{n-1}x - n\sin x\cos^{n-1}x = n\sin x.\cos x(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x)$,

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin x.\cos x(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, suy ra $\sin^n x + \cos^n x = 2^{\frac{2-n}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Bài 16: a. (3; 1) và $\left(1; \frac{1}{3}\right)$. b. (1; 1) và $\left(2; -\frac{3}{2}\right)$.

Bài 17: a. $\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right)$, (3; 1) và $\left(1; -\frac{3}{2}\right)$. b. $\left(-4; \frac{17}{4}\right)$.

Bài 18: a. (5 ; 2).

Bài 19:

a. Ta có $\overrightarrow{AB}(3; -6; 4)$, $\overrightarrow{AC}(4; -6; 2)$, $\overrightarrow{AD}(4; -5; 1)$, từ đó suy ra:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = \left(\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}\right).(4; -5; 1) = 4 \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ Ba véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Vậy, bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

b. Thể tích tứ diện ABCD được cho bởi:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}.4 = \frac{2}{3}.$$

c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (BCD), ta được: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (2; 1; 1)$.

Khi đó, phương trình mặt phẳng (BCD) được cho bởi:

$$(BCD): \begin{cases} \text{qua } B(4;0;6) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2;1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (BCD): 2(x-4)+1.(y-0)+1.(z-6)=0$$

$$\Leftrightarrow (BCD): 2x+y+z-14=0.$$

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (BCD) có phương trình:

$$(BCD): Ax+By+Cz+D=0 \text{ với } A^2+B^2+C^2>0. \quad (1)$$

Vì B, C, D thuộc (BCD), ta được:

$$\begin{cases} 4A+6C+D=0 \\ 5A+4C+D=0 \\ 5A+B+3C+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2B \\ C=B \\ D=-14B \end{cases}.$$

Thay A, B, C vào (1), ta được:

$$(P): 2Bx+By+Bz-14=0 \Leftrightarrow (P): 2x+y+z-14=0.$$

d. Gọi M(x; y; z) là tọa độ tiếp điểm, ta có:

- Vì $M \in (BCD)$ nên: $2x+y+z-14=0.$ (2)
- Vì $AM \perp (BCD)$ nên:

$$\overrightarrow{AM} \perp (BCD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{n_{(BCD)}} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y-6}{1}=\frac{z-2}{1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-11 \\ z=y-4 \end{cases}. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$2(2y-11)+y+y-4-14=0 \Leftrightarrow y=\frac{20}{3} \Rightarrow M\left(\frac{7}{3};\frac{20}{3};\frac{8}{3}\right).$$

Khi đó, phương trình mặt cầu được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(1;6;2) \\ \text{Bán kính } R=AM=\dfrac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-1)^2+(y-6)^2+(z-2)^2=\frac{8}{3}.$$

Bài 20:

a. Từ giả thiết:

$$\overrightarrow{OA_1} \perp \overrightarrow{DA}(-a;0;d) \Rightarrow \overrightarrow{OA_1}(d;0;a)$$

$$\overrightarrow{OB_1} \perp \overrightarrow{DB}(0;-a;d) \Rightarrow \overrightarrow{OB_1}(0;d;a).$$

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P) chứa các đường thẳng OA_1, OB_1, ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{OA_1} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{OB_1} \end{cases} \Rightarrow \vec{n}\left(\begin{vmatrix} 0 & a \\ d & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & d \\ a & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}\right) = \vec{n}(-ad;-ad;d^2) \text{ chọn } \vec{n}(a;a;-d).$$

Vậy phương trình (P) được xác định bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } O(0;0;0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(a;a;-d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): ax+ay-dz=0.$$

Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng CD bởi $\vec{n} // \overrightarrow{CD}(-a;-a;d)$.

b. Ta có:

$$\cos A_1\hat{O}B_1 = \frac{|\overrightarrow{OA_1}.\overrightarrow{OB_1}|}{|\overrightarrow{OA_1}|.|\overrightarrow{OB_1}|} = \frac{|a^2|}{\sqrt{a^2+d^2}.\sqrt{a^2+d^2}} = \frac{a^2}{a^2+d^2}.$$

Vậy, ta được:

$$\widehat{A_1OB_1} = 45^0 \Leftrightarrow \cos\widehat{A_1OB_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2+d^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow d = a\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Bài 21:

a. Phương trình mặt phẳng (HIK) được cho bởi:

$$(HIK): \begin{cases} \text{qua } H\left(\frac{1}{2};0;0\right) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{3}\right) \text{ và } \overrightarrow{KI}\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow (HIK): \begin{cases} \text{qua } H\left(\frac{1}{2};0;0\right) \\ \text{vtpt } \vec{n}\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6};-\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (HIK): $2x + 2y - 9z - 1 = 0$.

Giao tuyến (d) của (HIK) với mặt phẳng $x + z = 0$, (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} 2x + 2y - 9z - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

Lấy điểm $A(-1, 6, 1) \in (d)$ và gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -9 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right) = \vec{a}(2; -11; -2).$$

Khi đó:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } A(-1;6;1) \\ \text{vtcp } \vec{a}(2;-11;-2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-6}{-11} = \frac{z-1}{-2}.$$

b. Mặt phẳng (HIK) có vtpt $\vec{n}(2; 2; -9)$ và mặt phẳng (Oxy) có vtpt $\vec{k}(0; 0; 1)$.

Suy ra, cosin của góc phẳng α tạo bởi mặt phẳng (HIK) với mặt toạ độ Oxy, được xác định bởi công thức:

$$\cos\alpha = \frac{|0+0-9|}{\sqrt{4+4+81}.\sqrt{0+0+1}} = \frac{9}{\sqrt{89}}.$$

Bài 22:

a. Giả sử mặt cầu (S) có phương trình:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$.

Điểm A, A', B, C $\in$ (S), ta được:

$$\begin{cases} 4 - 4a + d = 0 \\ 36 - 12a + d = 0 \\ 9 - b + d = 0 \\ 16 - 8c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 7/2 \\ c = 7/2 \\ d = 12 \end{cases}, \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 7y - 7z + 12 = 0$.

Bằng cách thay tọa độ của các điểm B' và C' vào phương trình mặt cầu chúng ta kết luận các điểm B' và C' cùng nằm trên mặt cầu (S).

b. Vì OABC là tứ diện vuông đỉnh O lên hình chiếu vuông góc của O lên (ABC) chính là trọng tâm H của ΔABC.

Ta có:

$$(OH): \begin{cases} \text{Qua O} \\ OH \perp (ABC) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (OH): \begin{cases} \text{Qua O} \\ \text{vtcp } \vec{u} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (12; 8; 6) \text{ chọn } (6; 4; 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (OH): \begin{cases} x = 6t \\ y = 4t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$\Delta A'B'C'$ có trọng tâm $G\left(2; \frac{4}{3}; 1\right)$ và thay tọa đooj của G vào phương trình đường thẳng (OH), ta thấy:

$$\begin{cases} 2 = 6t \\ \frac{4}{3} = 4t \\ 1 = 3t \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow G \in (OH) \Leftrightarrow O, G, H \text{ thẳng hàng.}$$

c. Ta lần lượt có:

- Phương trình mặt phẳng (ABC') được cho bởi:

$$(ABC'): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow (ABC'): 3x + 2y + 2z - 6 = 0.$$

- Phương trình mặt phẳng (A'B'C) được cho bởi:

$$(A'B'C): \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow (A'B'C): 2x + 3y + 3z - 12 = 0.$$

- Phương trình giao tuyến của mặt phẳng (ABC') và mặt phẳng (A'B'C) có dạng:

$$(\Delta): \begin{cases} 3x + 2y + 2z - 6 = 0 \\ 2x + 3y + 3z - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M\left(-\frac{6}{5}; \frac{24}{5}; 0\right) \\ \text{vtcp } \vec{a}(0; 1; -1) \end{cases}.$$

Từ đó, suy ra:

$$d(O, (\Delta)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OM}, \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|} = \frac{\left|\left(-\frac{24}{5}; -\frac{6}{5}; -\frac{6}{5}\right)\right|}{|(0; 1; -1)|} = \frac{18}{5}.$$

Bài 23:

a. Ta lần lượt có:

- Gọi H_A là hình chiếu vuông góc của A lên Ox thì:

$$H_A(1; 0; 0) \Rightarrow d(A, Ox) = AH_A = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

- Gọi H_B là hình chiếu vuông góc của B lên Ox thì:

$$H_B(-2; 0; 0) \Rightarrow d(B, Ox) = AH_A = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Từ (1) và (2) suy ra hai điểm A và B cách đều trục Ox.

b. Giả sử C(0; 0; z) thuộc Oz thỏa mãn điều kiện đầu bài, tức là:

$$\vec{AC} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AC}.\vec{BC} = 0 \Leftrightarrow (-1; 3; z + 1).(2; -1; z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 - 3 + (z + 1)(z - 3) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} z = 4 \\ z = -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C_1(0; 0; 4) \\ C_2(0; 0; -2) \end{bmatrix}.$$

Vậy, tồn tại hai điểm C_1 và C_2 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi A_1, B_1 theo thứ tự là hình chiếp vuông góc của A, B lên (Oyz), suy ra:

$A_1(0; -3; -1)$, $B_1(0; 1; 3)$

$$\Rightarrow (AB): \begin{cases} \text{Qua } A_1(0; -3; -1) \\ \text{vtcp } \vec{A_1B_1}(0; 4; 4) \text{ chọn } (0; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases} x = 0 \\ y = t - 3, t \in \mathbb{R} \\ z = t - 1 \end{cases}.$$

d. Giả sử mặt cầu (S) có phương trình:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Vì tâm I(a; b; c) thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $c = 0$. (1)

Với các điểm O, A, B thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 1 + 9 + 1 - 2a + 6b + 2c + d = 0 \\ 4 + 1 + 9 + 4a - 2b - 6c + d = 0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} d = 0 \\ 2a - 6b = 11 \\ 2a - b = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{53}{10},\ b = -\frac{18}{5},\ c = d = 0.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{53}{5}x + \frac{36}{5}y = 0$.

Bài 24:

a. Ta lần lượt có:

$$\vec{AB}(-3; 3; 0) \Rightarrow AB = \left|\vec{AB}\right| = 3\sqrt{2},$$

$$\vec{AC}(-3; 0; 3) \Rightarrow AC = \left|\vec{AC}\right| = 3\sqrt{2},$$

$$\vec{BC}(0; -3; 3) \Rightarrow BC = \left|\vec{BC}\right| = 3\sqrt{2}.$$

Từ đó, suy ra ABC là tam giác đều.

b. Phương trình mặt phẳng (ABC) được cho bởi:

$$(ABC): \begin{cases} \text{Qua } A(4; -1; 2) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (ABC): \begin{cases} \text{Qua } A(4; -1; 2) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (9; 9; 9) \text{ chọn } (1; 1; 1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (ABC): x + y + z - 5 = 0.$

Gọi M, N, P theo thứ tự là giao điểm của (ABC) với các trục Ox, Oy, Oz, ta có M(5; 0; 0), N(0; 5; 0) và P(0; 0; 5).

Từ đó, suy ra:

$$V_{O.MNP} = \frac{1}{6}OM.ON.OP = \frac{125}{6} \text{ (đvtt).}$$

c. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, suy ra:

I là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow I(2; 0; 3)$.

Khi đó, phương trình trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } I \\ (d) \perp (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } I(2; 0; 3) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

d. Để ABCD là tứ diện đều điều kiện là:

$$DA = DB = DC = AB \Leftrightarrow \begin{cases} DA = DB = DC & (1) \\ DA^2 = AB^2 & (2) \end{cases}.$$

Ta lần lượt xét:

- Để thỏa mãn (1) thì D thuộc trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC, do đó có D(2 + t; t; 3 + t).
- Khi đó, điều kiện (2) trở thành:

$$(2 + t - 4)^2 + (t + 1)^2 + (3 + t - 2)^2 = 18 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm 2$$

$\Rightarrow D_1(4; 2; 5)$ và $D_2(0; -2; 1)$.

Vậy, tồn tại hai điểm D_1 và D_2 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Bài 25:

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = 1 - \cos 3x$, suy ra $du = 3\sin 3x.dx$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 0$,
- Với $x = \frac{\pi}{6}$ thì $u = 1$.

Từ đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 3x)\sin 3x dx = \frac{1}{3}\int_0^1 u du = \frac{1}{6}u^2\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^{\pi/6}(1-\cos 3x)\sin 3x.dx = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/6}(1-\cos 3x).d(1-\cos 3x) = \frac{1}{6}(1-\cos 3x)^2\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{6}$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt u = 5 – 4cost, suy ra du = 4sint.dt.

Đổi cận:

- Với t = 0 thì u = 1,
- Với t = π thì u = 9.

Từ đó:

$$\int_0^{\pi}5(5-4\cos t)^{\frac{1}{4}}\sin t.dt = \frac{5}{4}\int_1^9 u^{\frac{1}{4}}du = u^{\frac{5}{4}}\Big|_1^9 = 9^{\frac{5}{4}}-1.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^{\pi}5(5-4\cos t)^{\frac{1}{4}}\sin t.dt = \frac{5}{4}\int_0^{\pi}(5-4\cos t)^{\frac{1}{4}}.d(5-4\cos t) = (5-4\cos x)^{\frac{5}{4}}\Big|_0^{\pi}$$

$$= 9^{\frac{5}{4}}-1.$$

Bài 26:

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt u = tanx, suy ra du = $\frac{dx}{\cos^2 x}$.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì u = 0,
- Với x = $\frac{\pi}{4}$ thì u = 1.

Từ đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx = \int_0^1 udu = \frac{1}{2}u^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\tan x.dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\pi/4}\tan x.d(\tan x) = \frac{1}{2}\tan^2 x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt u = sinx, suy ra du = cosx.dx.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì u = 0,
- Với x = $\frac{\pi}{2}$ thì u = 1.

Từ đó:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{1+\sin x} = \int_0^1\frac{du}{1+u} = \ln|1+u|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Cách 2: Đặt u = 1 + sinx, suy ra du = cosx.dx.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì u = 1,
- Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì u = 2.

Từ đó:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x} = \int_1^2 \frac{du}{u} = \ln|u||_1^2 = \ln 2.$$

Cách 3: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x} = \int_0^{\pi/2} \frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x} = \ln|1+\sin x||_0^{\pi/2} = \ln 2.$$

Bài 27:

a. Đặt t = sinx, suy ra dt = cosx.dx.

Đổi cận:

- x = 0 thì t = 0,
- $x = \frac{\pi}{6}$ thì $t = \frac{1}{2}$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dt}{6-5t+t^2} = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right) dt = \ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right| \Big|_0^{1/2} = \ln\frac{10}{9}.$$

b. Đặt t = cosx suy ra dt = –sinx.dx.

Đổi cận:

- x = 0 thì t = 1,
- $x = \frac{\pi}{2}$ thì t = 0.

Khi đó:

$$I = -\int_1^0 \frac{t^3 dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{t^3 dt}{1+t^2} = \int_0^1 \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Bài 28:

a. Đặt $u = 2\sin^2 x + \cos^2 x$ suy ra:

$du = (4\sin x.\cos x - 2\cos x.\sin x)dx = \sin 2x.dx$.

Đổi cận:

- x = 0 thì u = 1,
- $x = \frac{\pi}{6}$ thì $t = \frac{5}{4}$.

Khi đó:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\sin 2x.dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_1^{5/4} \frac{dt}{t} = \ln|t||_1^{5/4} = \ln\frac{5}{4}.$$

b. Đặt $u = \tan x$, suy ra:

$$du = \frac{du}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)dx = (1 + t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 0$,
- Với $x = \frac{\pi}{6}$ thì $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Từ đó:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos 2x} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln|u-1| - \ln|u+1|\right)\Big|_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\Big|_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

Bài 29: Vì M huộc (d) nên M(2 + 2t, 3 + t). Khi đó:

$$5 = AM = \sqrt{(2+2t)^2 + (2+t)^2} \Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1 \text{ và } t_2 = -\frac{17}{5}.$$

- Với $t_1 = 1$, suy ra điểm $M_1(4, 4)$.
- Với $t_2 = -\frac{17}{5}$, suy ra điểm $M_2(-\frac{24}{5}, -\frac{2}{5})$.

Vậy, tồn tại hai điểm $M_1(4, 4)$ và $M_2(-\frac{24}{5}, -\frac{2}{5})$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 30: Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Vì $M(x_M, y_M) \in (d)$, suy ra

$$x_M - 2y_M + 15 = 0 \Leftrightarrow x_M = 2y_M - 15,$$

khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 = (2y_M - 15)^2 + y_M^2 = 5y_M^2 - 60y_M + 225$$
$$= 5(y_M - 6)^2 + 45 \geq 45.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2)_{Min} = 45$ đạt được khi $y_M = 6 \Rightarrow M(-3, 6)$.

Cách 2: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2t - 15 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Điểm $M \in (d)$, suy ra $M(2t - 15, t)$.

Khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 = (2t - 15)^2 + t^2 = 5t^2 - 60t + 225 = 5(t - 6)^2 + 45 \geq 45.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2)_{Min} = 45$ đạt được khi:

$t = 6 \Rightarrow M(-3, 6)$.

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$x_M - 2y_M + 15 = 0 \Leftrightarrow 15 = 2y_M - x_M \overset{\text{Bunhiacôpxki}}{\leq} \sqrt{(4+1)(y_M^2 + x_M^2)}$$

$$\Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 \geq 45.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2)_{Min} = 45$ đạt được khi: $y_M = -2x_M \overset{(d)}{\Rightarrow} M(-3, 6)$.

Bài 31: Ta có nhận xét:

$t_A.t_B = (-2-1)(2+2-1) = -9 < 0 \Rightarrow$ A, B khác phía với (d)

Ta luôn có $MA + MB \geq AB$

do đó $(MA + MB)_{Min} = AB$ đạt được khi:

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \{M\} = (d) \cap (AB)$.

- Phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(0,2) \\ \text{qua } B(2,-2) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2-2} \Leftrightarrow (AB): 2x + y - 2 = 0$$

- Toạ độ điểmM là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1, 0).$$

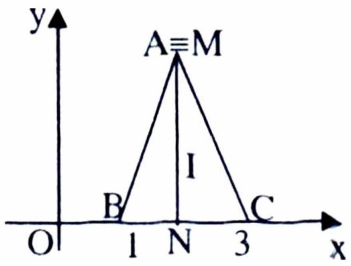
Vậy, tại điểm M(1, 0) ta được MA + MB nhỏ nhất.

Bài 32:

a. Ta có toạ độ các điểm $A(a, 3a\sqrt{7} - 3\sqrt{7})$, B(1, 0), C(2a − 1, 0),

Từ giả thiết:

- $A \in P(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ 3a\sqrt{7} - 3\sqrt{7} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 1.$



- $p = 9 \Leftrightarrow \dfrac{AB + BC + AC}{2} = 9$

$$\Leftrightarrow 2.8|a-1| + 2|a-1| = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 0 \ (l) \end{cases}$$

Từ đó $A(2, 3\sqrt{7})$, B(1, 0), C(3, 0).

b. Ta cần tìm điểm $M \in AB$ (tức là phải tìm $x = BM$, $0 \leq x \leq 8$) sao cho trên cạnh BC tồn tại điểm N thoả mãn:

$$BN = p - x = 9 - x, 0 \leq 9 - x \leq 2 \Leftrightarrow 7 \leq x \leq 9,$$

$$\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Từ (1) ta được:

$$\frac{BM.BN}{AB.BC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x(9-x)}{8.2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 1 \ (l) \end{cases}.$$

- Với $x = 8 \Rightarrow M \equiv A(2, 3\sqrt{7})$ và N(2, 0) là trung điểm BC.

Bài 33: Giải phương trình:

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 79$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \overset{n\in N}{\Leftrightarrow} n = 12.$$

Khi đó:

$$(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}})^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (x^{\frac{4}{3}})^{12-k} (x^{-\frac{28}{15}})^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{\frac{4(12-k)}{3} - \frac{28k}{15}}$$

từ đó, số hạng không phụ thuộc x trong khai triển trên thoả mãn:

$$\frac{4(12-k)}{3} - \frac{28k}{15} = 0 \Leftrightarrow k = 5.$$

Vậy, số hạng không phụ thuộc x bằng C_{12}^5.

Bài 34: Ta có:

$$\left(\sqrt{3} - \sqrt[4]{5}\right)^{124} = \sum_{ki=0}^{124} C_{124}^k (\sqrt{3})^{124-k} (-\sqrt[4]{5})^k = \sum_{k=0}^{124} (-1)^k C_{124}^k 3^{\frac{124-k}{2}} 5^{\frac{k}{4}}.$$

Số hạng thứ i + 1 là hữu tỉ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{124-k}{2} \in N \\ \frac{k}{4} \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in N \\ 0 \le k \le 124 \\ (124-k) \vdots 2 \\ k \vdots 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in N \\ 0 \le k \le 124 \\ k = 4l \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le l \le 31 \\ k = 4l \in N \end{cases}.$$

Vậy, trong khai triển đã cho có 32 số hạng hữu tỉ.

Bài 35: Ta có:

$$P(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + ... + (1+x)^{14}$$

$$= \sum_{k=0}^{9} C_9^k x^k + \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^k + ... + \sum_{k=0}^{14} C_{14}^k x^k$$

do đó, hệ số a_9 được cho bởi $a_9 = C_9^9 + C_{10}^9 + .. + C_{14}^9 = 3003$.

Bài 36: Ta có:

$$f(x) = (x^2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2(n-k)}$$

suy ra, tổng tất cả các hệ số của khai triển bằng:

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^k = f(1) = 2^n \Rightarrow 2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10.$$

Vậy, hệ số của x^{12} trong khai triển bằng $C_{10}^4 = 210$.

Bài 37: Ta có:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^5 = [(1+x)(1+x^2)]^5 = (1+x)^5(1+x^2)^5$$

$$= \sum_{k=0}^{5} C_5^k x^k \cdot \sum_{k=0}^{5} C_5^k (x^2)^k.$$

a. Từ đó hệ số a_{10} được cho bởi $a_{10} = C_5^0 . C_5^5 + C_5^2 . C_5^4 + C_5^4 . C_5^3 = 101$.

b. Ta có:

$$S_1 = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{15} = f(1) = 4^5 = 1024.$$

c. Ta có:

$$S_2 = a_0 - a_1 + a_2 - ... - a_{15} = f(-1) = 0.$$

Bài 38: Ta có:

$$(x+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}.2^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k.x^{n-k}.$$

từ đó, hạng tử thứ 10, 11, 12 có hệ số bằng $C_n^9 2^9$, $C_n^{10} 2^{10}$, $C_n^{11} 2^{11}$

Để hạng tử thứ 11 là số hạng tử có hệ số lớn nhất điều kiện là:

$$\begin{cases} C_n^{10} 2^{10} > C_n^9 2^9 \\ C_n^{10} 2^{10} > C_n^{11} 2^{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2.n!}{10!.(n-10)!} > \dfrac{n!}{9!.(n-9)!} \\ \dfrac{n!}{10!.(n-10)!} > \dfrac{2.n!}{11!.(n-11)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{10} > \dfrac{1}{n-9} \\ \dfrac{1}{n-10} > \dfrac{2}{11} \end{cases} \Leftrightarrow 14 < n < \frac{31}{2} \overset{n\in N}{\Leftrightarrow} n = 15.$$

Vậy, với n = 15 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 39: Ta có:

$$(1+2x)^{12} = \sum_{i=0}^{12} C_{12}^i (2x)^i = \sum_{i=0}^{12} C_{12}^i 2^i x^i \Rightarrow a_i = C_{12}^i 2^i, \text{ với } i = \overline{1,12}.$$

Để tìm $\max(a_1, a_2, ..., a_{12})$ với $i = \overline{1,12}$, thực hiện so sánh a_i và a_{i+1}, bằng cách xét:

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{C_{12}^i 2^i}{C_{12}^{i+1} 2^{i+1}} = \frac{12!}{\dfrac{i!.(12-i)!}{2.12!}} = \frac{i+1}{2(12-i)}. \quad (1)$$
$$\overline{(i+1)!.(11-i)!}$$

Từ (1), suy ra:

- $a_{i+1} < a_i \Leftrightarrow \dfrac{a_i}{a_{i+1}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{i+1}{2(12-i)} > 1 \Leftrightarrow i > \dfrac{23}{3}$.
- $a_{i+1} > a_i \Leftrightarrow \dfrac{a_i}{a_{i+1}} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{i+1}{2(12-i)} < 1 \Leftrightarrow i < \dfrac{23}{3}$.

Tức là, khi i chạy từ 1 đến 12 thì:

- a_i giảm khi i tăng và $i > \dfrac{23}{3}$.
- a_i tăng khi i tăng và $i < \dfrac{23}{3}$.

Vậy, a_i đạt giá trị lớn nhất tại i = 8 và có giá trị bằng $C_{12}^8 2^8 = 126720$.

Bài 40: Với mọi x, và với k là số nguyên dương ta có:

$$(1+x)^k = C_k^0 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + ... + C_k^k x^k$$

$$\Leftrightarrow C_n^k (1+x)^k = C_k^0 C_n^k + C_k^1 C_n^k x + C_k^2 C_n^k x^2 + ... + C_k^k C_n^k x^k. \quad (1)$$

Ta có:

$$C_k^m . C_n^k = \frac{k!}{m!(k-m)!} . \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{. n!}{m!(n-m)!} . \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!}$$

$$= C_n^m . C_{n-m}^{k-m}.$$

Do đó (1) có dạng:

$$C_n^k (1+x)^k = C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_{n-1}^{k-1} x + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} x^2 + ... + C_n^k C_0^{n-k} x^k. \quad (2)$$

Thay $x = -1$ vào (2), ta được:

$$0 = C_n^0 C_n^k - C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} - ... + (-1)^k C_n^k C_0^{n-k}$$, đpcm.

Bài 41:

a. Điều kiện $x \neq 0$.

Chia cả hai vế của phương trình cho $9^{-\frac{1}{x}}$, ta được:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{x}} + \left(\frac{6}{9}\right)^{-\frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{x}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}} = 1 .$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}$, điều kiện $t > 0$. (*)

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$t^2 + t - 1 = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} = \log_{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow -x = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{3}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{3}{2}$.

b. Điều kiện $x > 0$. Biến đổi phương trình về dạng:

$$4.4^{\ln x} - 6^{\ln x} - 18.3^{\ln x^2} = 0 \Leftrightarrow 4.2^{2\ln x} - (2.3)^{\ln x} - 18.3^{2\ln x} = 0.$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $3^{2\ln x}$, ta được:

$$4\left(\frac{2}{3}\right)^{2\ln x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\ln x} - 18 = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{\ln x}$, điều kiện $t > 0$. (*)

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$4t^2 - t - 18 = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} t = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\ln x} = \frac{9}{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = e^{-2}$.

Bài 42:

a. Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(3\lg x)^2 - 20.\frac{1}{2}\lg x + 1 = 0 \Leftrightarrow 9\lg^2 x - 10\lg x + 1 = 0.$$

Đặt $t = \lg x$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$9t^2 - 10t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 1/9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 1 \\ \lg x = 1/9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 10^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{10} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 10$ hoặc $x = \sqrt[9]{10}$.

b. Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 0 < 2x \neq 1 \\ 0 < 8x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)\backslash\{\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\}.$ (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}\log_2 2x} = \frac{\frac{1}{3}\log_2 4x}{\frac{1}{4}\log_2 8x} \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{1 + \log_2 x} = \frac{2(2 + \log_2 x)}{3(3 + \log_2 x)}.$$

Đặt $t = \log_2 x$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{t}{1+t} = \frac{2(2+t)}{3(3+t)} \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{16} \end{array}\right.$$, thỏa mãn điều kiện (*)

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = \frac{1}{16}$.

c. Điều kiện: $\begin{cases} 0 < 9x \neq 1 \\ 0 < 3x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)\backslash\{\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\}.$ (**)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\log_{9x} 3 - \log_{3x} 3 + \frac{1}{2}.5\log_3 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\log_3 9x} - \frac{1}{\log_3 3x} + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{1 + \log_3 3x} - \frac{1}{\log_3 3x} + \frac{5}{2} = 0.$$

Đặt $t = \log_3 3x$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{3}{1+t} - \frac{1}{t} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 6t - 2(1+t) + 5t(1+t) = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 9t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0,2 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 3x = 0,2 \\ \log_3 3x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 3^{0,2} \\ 3x = 3^{-2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3^{-0,8} \\ x = 3^{-3} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 3^{-0,8}$ hoặc $x = 3^{-3}$.

Bài 43:

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_3(3^x - 1).\log_3 3(3^x - 1) = 12 \Leftrightarrow \log_3(3^x - 1).[1 + \log_3(3^x - 1)] = 12.$$

Đặt $t = \log_3(3^x - 1)$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$t(1 + t) = 12 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(3^x - 1) = -4 \\ \log_3(3^x - 1) = 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 1 = 3^{-4} \\ 3^x - 1 = 3^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 82/81 \\ 3^x = 28 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_3 82/81 = \log_3 82 - 4 \\ x = \log_3 28 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = \log_3 82 - 4$ hoặc $x = \log_3 28$.

b. Điều kiện $0 < x - 1 \neq 1 \Leftrightarrow 1 < x \neq 2$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\log_{x-1} 2 = 1 + \log_2(x - 1) \Leftrightarrow \frac{2}{\log_x(x - 1)} = 1 + \log_2(x - 1).$$

Đặt $t = \log_2(x - 1)$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{2}{t} = 1 + t \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x - 1) = 1 \\ \log_2(x - 1) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 2 \\ x - 1 = 2^{-2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 5/4 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 3$ hoặc $x = \frac{5}{4}$.

Bài 44: Viết lại phương trình dưới dạng: $(2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}}) - 6(2^x - \frac{2}{2^x}) = 1$. (1)

Đặt $t = 2^x - \frac{2}{2^x}$, suy ra:

$$2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}} = (2^x - \frac{2}{2^x})^3 + 3.2^x.\frac{2}{2^x}(2^x - \frac{2}{2^x}) = t^3 + 6t.$$

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$t^3 + 6t - 6t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2^x - \frac{2}{2^x} = 1. \quad (2)$$

Đặt $u = 2^x$, $u > 0$, khi đó phương trình (2) có dạng:

$$u - \frac{2}{u} = 1 \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1 \text{ (l)} \\ u = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow u = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bài 45: Nhận xét rằng

$$(\sqrt{2 - \sqrt{3}}).(\sqrt{2 + \sqrt{3}}) = \sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 1.$$

Do đó, nếu đặt $t = (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x$, điều kiện $t > 0$, thì $(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = \frac{1}{t}$.

Khi đó, phương trình tương đương với $t + \frac{m}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + m = 0$. (2)

a. Với m = 1, ta được:

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2+\sqrt{3} \\ t = 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2+\sqrt{3} \\ (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3} \\ (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = (2+\sqrt{3})^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = 1 \\ \frac{x}{2} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right. .$$

Vậy, với m = 1 phương trình có hai nghiệm x = ±2.

b. Phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Rightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 tương ứng:

$t_1 = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^{x_1}$ và $t_2 = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^{x_2}$.

Vì $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$ nên $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{x_1-x_2}$

$$= (2+\sqrt{3})^{\log_{2+\sqrt{3}} 3} \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2.$$

Vậy, để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, $t_2 > 0$ thoả mãn $t_1 = 3t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ t_1 = 3t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 > 0 \\ t_1.t_2 = m > 0 \\ t_1 = 3t_2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

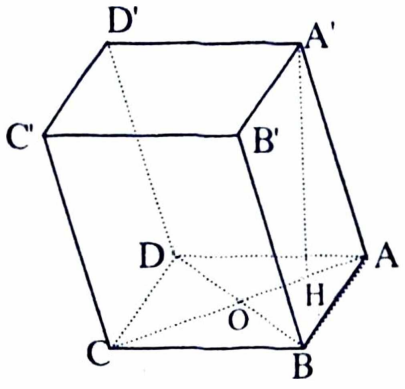
Vậy, với m = 3 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 46: Với hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' thỏa mãn điều kiện đầu bài (các góc phẳng ở đỉnh A bằng 60^0), ta có nhận xét A.A'BD là hình chóp đều cạnh a nên:

$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = A'A^2 - \left(\frac{2}{3}.AO\right)^2$$

$$= a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

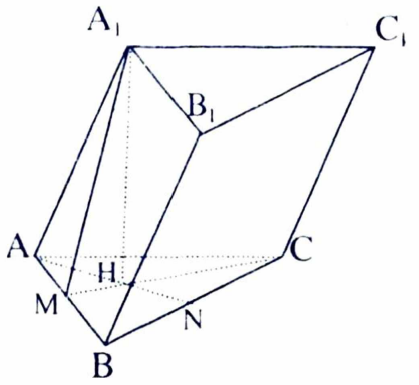


Thể tích V của lăng hộp được cho bởi:

$$V = S_{ABCD}.A'H = 2S_{\Delta ABD}.A'H = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}..$$

Bài 47:

a. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm AB, BC.



Gọi H là tâm ΔABC, ta có:

$$A_1H \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A_1AH} = 60^0.$$

Thể tích V của lăng trụ được cho bởi:

$$V = S_{\Delta ABC}.A_1H \qquad (1)$$

Vì ΔABC đều cạnh a nên:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \qquad (2)$$

Trong ΔA_1HA vuông tại H, ta có:

$$AA_1 = 2AH = 2.\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3},$$

$$A_1H = AH.\tan\widehat{A_1AH} = \frac{2}{3}AN.\tan 60^0 = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = a. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được: $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

b. Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp A_1H \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA_1H) \Rightarrow BC \perp AA_1.$$

Mặt khác, ta luôn có:

$AA_1 // BB_1 \Rightarrow BC \perp BB_1 \Rightarrow BCC_1B_1$ là hình chữ nhật.

c. Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh lăng trụ, ta có:

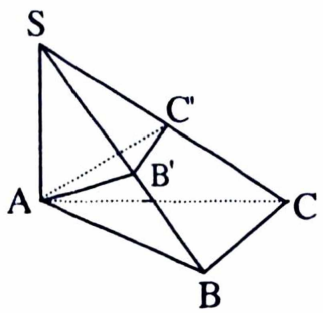
$$S_{xq} = 2S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1} = 2A_1M.AB + BB_1.BC = (2A_1M + BB_1)BC.$$

Trong ΔA_1HM vuông tại H, ta có:

$$A_1M = \sqrt{A_1H^2 + MH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6},$$

Từ đó, suy ra: $S_{xq} = \left(2.\frac{a\sqrt{39}}{6} + \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right).a = \frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{13}+2)}{3}$.

Bài 48:



a. Ta có:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}.$$

b. Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'. \qquad (1)$$

Ngoài ra, vì ΔSAB cân tại A nên $SB \perp AB'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SC \overset{AC' \perp SC}{\Rightarrow} SC \perp (AB'C'), \text{ đpcm.}$$

c. Từ kết quả câu b), ta có:

$$V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3}SC'.S_{\Delta AB'C'} = \frac{1}{6}.SC'.AB'.B'C'. \quad (3)$$

Trong ΔSAB vuông cân tại A, ta lần lượt có:

$$SB = a\sqrt{2}, \ AB' = SB' = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad (4)$$

Trong ΔSAC vuông tại A, ta lần lượt có:

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + AB^2 + BC^2 = 3a^2 \Leftrightarrow SC = a\sqrt{3},$$

$$SA^2 = SC'.SC \Rightarrow SC' = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad (5)$$

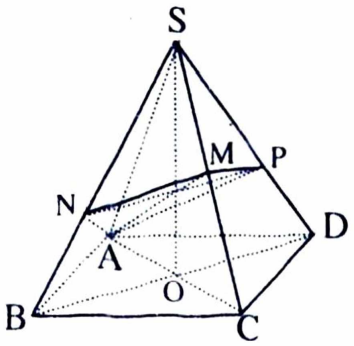
$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{SB'}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow B'C' = \frac{a\sqrt{6}}{6}. \quad (6)$$

Thay (4), (5), (6) vào (3) ta được: $V_{S.AB'C'} = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3}{36}$.

Bài 49: Gọi O là tâm hình bình hành ABCD và G là giao điểm của SO với AM. Trong (SBD) dựng Gx song song với BD cắt SB, SD theo thứ tự tại N, P, suy ra ANMP là thiết diện cần dựng.

Trong ΔSAC, vì SO và AM là các trung tuyến nên G là trọng tâm tam giác, suy ra:

$$\frac{SG}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{2}{3}.$$



Từ kết quả bài 17, ta có:

$$\frac{V_{S.ANM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SM}{SC}$$

$$= 1.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.ANM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}.$$

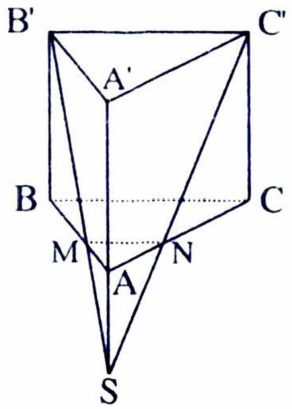
$$\frac{V_{S.APM}}{V_{S.ADC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SP}{SD}.\frac{SM}{SC} = 1.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.ANM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{V_{S.ANMP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ANM} + V_{S.APM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.ANMP}}{V_{ABCDNMP}} = \frac{1}{2}.$$

Bài 50: Gọi a là cạnh của lăng trụ, ta có:

$$V_{LT} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$



Ta có nhận xét:

$B'C' // BC \Rightarrow (B'C'M) \cap (ABC) = Mx // BC.$

Giả sử Mx cắt AC tại N, ta được thiết diện là MNC'B' và dễ thấy BM, CN, A'A đồng quy tại S, ta được:

$$V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3}SA'.S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{3}.2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Sử dụng kết quả về tỉ số thể tích, ta có:

$$\frac{V_{AMNB'C'A'}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{V_{S.A'B'C'} - V_{S.AMN}}{V_{S.A'B'C'}} = 1 - \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.A'B'C'}} = 1 - \frac{SA}{SA'}.\frac{SM}{SB'}.\frac{SN}{SC'}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow V_{AMNB'C'A'} = \frac{7}{8}V_{S.A'B'C'} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{48}$$

$$\Rightarrow V_{MNCBB'C'A'} = V_{LT} - V_{AMNB'C'A'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} - \frac{7a^3\sqrt{3}}{48} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{48}.$$

Từ đó, ta được:

$$\frac{V_{AMNB'C'A'}}{V_{MNCBB'C'A'}} = \frac{\frac{7a^3\sqrt{3}}{48}}{\frac{5a^3\sqrt{3}}{48}} = \frac{7}{5}.$$

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI B NĂM 2006

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số:

$$(C): y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}.$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đó vuông góc với tiệm cận xiên của (C).

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình:

$$\cot x + \sin x\left(1 + \tan x.\tan\frac{x}{2}\right) = 4.$$

2. Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu III: (2 điểm): Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(0; 1; 2) và hai đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1},\ (d_2): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, đồng thời song song với (d_1), (d_2).
2. Tìm toạ độ các điểm M thuộc (d_1), N thuộc (d_2) sao cho ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Câu IV: (2 điểm)

1. Tính tích phân $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$.
2. Cho hai số thực x, y thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y - 2|.$$

PHẦN TỰ CHỌN

Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn:

$$(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

và điểm M(−3; 1). Gọi T_1 và T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

2. Cho tập hợp A gồm n phần tử (n > 4). Biết rằng, số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

Câu V.b Theo chương trình THPT phân ban (2 điểm)

1. Giải bất phương trình $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$.
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, $AD = a\sqrt{2}$, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Tham khảo định hướng trong câu I.1 của đề toán khối A – 2003.
2. Từ giả thiết tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên chúng ta sẽ nhận được hệ số góc của nó, khi đó bài toán được chuyển về dạng " *Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số* (C): y = f(x) *biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng* k ", ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

   Cách 1: Xác định hoành độ tiếp điểm thông qua phương trình:

   $$f'(x) = k \Rightarrow \text{Hoàng độ tiếp điểm } x_0$$

   Từ đó, phương trình tiếp tuyến có dạng:

   $$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0).$$

   Cách 2: Thiết lập phương trình tiếp tuyến với hệ số góc k có dạng

   $$(d): y = kx + b.$$

   Tham số b được suy ra từ điều kiện (d) tiếp xúc với đồ thị hàm số, cụ thể:

   $$\begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases}.$$

Câu II.

1. Với phương trình hỗn hợp chứa tan, cot và sin, các bước thực hiện thông thường bao gồm:

   Bước 1: Thiết lập điều kiện có nghĩa cho phương trình. (*)

   Bước 2: Chuyển đổi phương trình về dạng chỉ chứa sin và cos, ở đây các em học sinh có thể định hướng dẫn như sau:

   $$1 + \tan x.\tan\frac{x}{2} = \frac{\cos x.\cos\frac{x}{2} + \sin x.\sin\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}$$

   $$\Rightarrow \sin x\left(1 + \tan x.\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Bước 3: Khi đó phương trình được chuyển về dạng:

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=4. \qquad (1)$$

Bước 4: Giải phương trình (1) bằng cách quy đồng tiếp và kết hợp với (*), để nhận được nghiệm đúng của phương trình.

2. Đây là phương trình chứa căn bậc hai cơ bản dạng $\sqrt{f(x,m)}=g(x)$, do đó chúng ta sẽ sử dụng phép biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x,m)=g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \alpha \\ h(x)=a.x^2+bx+c=0 \quad (*) \end{cases}$$

Từ đó, để phương trình ban đầu có 2 nghiệm thực phân biệt điều kiện là phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x \ge \alpha$, tức là:

$$\alpha \le x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a\ne 0 \\ \Delta > 0 \\ a.h(\alpha)\ge 0 \\ S/2 > \alpha \end{cases}.$$

Câu III. Với bài toán này các bước thực hiện bao gồm:

Bước 1: Chuyển phương trình đường thẳng (d_1) về dạng tham số (giả sử là u), từ đó chỉ ra các vtcp $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ của (d_1), (d_2).

Bước 2: Ta lần lượt:

1. Với câu 1), gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P) thì:

$$\begin{cases} (P)//(d_1) \\ (P)//(d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}\perp\vec{u_1} \\ \vec{n}\perp\vec{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n}=\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right].$$

Từ đó, phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P)\begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}.$$

2. Với câu 2), vì M thuộc (d_1), N thuộc (d_2) nên thoả mãn phương trình tham số của (d_1), (d_2).
Tiếp theo, bằng việc sử dụng các điều kiện A, M, N tức là:

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AN}$$

chúng ta sẽ nhận được giá trị của t, u để suy ra toạ độ của M, N.

Câu IV.

1. Đây là tích phân hàm số siêu việt, chúng ta sử dụng nhận xét $(e^x)'=e^x$, điều đó dẫn tới việc sử dụng ẩn phụ $t=e^x$ để tính tích phân đã cho. Cụ thể hơn là:

$$\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}=\frac{e^x dx}{e^{2x}-3e^x+2}=\frac{dt}{t^2-3t+2}.$$

Tới đây chúng ta sẽ sử dụng phân tích:

$$\frac{1}{t^2-3t+2}=\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t-1}$$

với các giá trị A, B được xác định bằng phương pháp hằng số bất định. Sau đó sử dụng công thức:

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C,\ a\neq 0.$$

2. Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến chứa căn bậc hai và biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối một biến y, do đó chúng ta sẽ định hướng thành hai phần việc:
   - Cần biến đổi biểu thức:
   $$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$
   về dạng chỉ chứa y (giả sử là f(y)). Và vì mỗi biểu thức đều có dạng:
   $$\sqrt{x_M^2+y_M^2}=OM$$
   nên chúng ta có ngay phương pháp toạ độ hoá để thực hiện mục tiêu đề ra.
   - Khi đó, để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:
   $$A=f(y)+|y-2|$$
   chúng ta có thể sử dụng đạo hàm hoặc bất đẳng thức.

Câu V.a.

1. Yêu cầu này được thực hiện dựa trên ý tưởng:
   "Nếu toạ độ các tiếp điểm T_1, T_2 cùng thoả mãn phương trình $Ax+By+C=0$ thì đó chính là phương trình đường thẳng T_1T_2"
   Do đó, chúng ta thực hiện theo các bước:
   Bước 1: Giả sử (C) có tâm I và toạ độ tiếp điểm là $T(x_0; y_0)$, ta có:
   $$\begin{cases}T\in(C)\\MT\perp IT\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}T\in(C)\\\overrightarrow{MT}.\overrightarrow{IT}=0\end{cases}\Rightarrow Ax_0+By_0+C=0.\quad(*)$$
   Bước 2: Toạ độ của T_1, T_2 thoả mãn (*) nên phương trình đường thẳng (T_1T_2) có dạng: $Ax+By+C=0$.
2. Trước tiên, các em học sinh cần nhớ được kết quả "*Với tập hợp* A *gồm* n *phần tử thì số tập con gồm* k *phần tử của* A *bằng* C_n^k", từ đó định hướng giải quyết bài toán gồm hai phần:
   Phần 1: Tìm n từ biểu thức điều kiện:
   $$C_n^4=20C_n^2.$$
   Phần 2: Tìm $k\in\{1, 2, ..., n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất, tức là tìm k để C_n^k lớn nhất. Đây là dạng toán cơ bản trong phần lý thuyết tổ hợp, cụ thể giá trị của k được xác định dựa trên $\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}>1$.

Câu V.b.

1. Bất phương trình được giải theo các bước:

   Bước 1: Sử dụng các phép biến đổi tương đương để khử log, khi đó chúng ta sẽ nhận được một bất phương trình mũ dạng:

   $$a.2^{2x} + b.2^{x} + c < 0.$$

   Bước 2: Sử dụng ẩn phụ $t = 2^x$ để giải bất phương trình trên.

2. Công việc:
   - Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB) sẽ được thực hiện bằng việc chứng minh $MB \perp (SAC)$.
   - Tính thể tích khối tứ diện ANIB hoàn toàn được thực hiện khi các em lựa chọn được đỉnh, để từ đó xác định ra đường cao và đáy.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI B NĂM 2006

Câu I.

1. *Bạn đọc tự làm.* Với kết quả đường thẳng $y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C).
2. Tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên nên có hệ số góc $k = -1$.
   Tới đây ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C) là nghiệm của phương trình:

$$y' = -1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = -1 \Leftrightarrow 2(x+2)^2 = 1 \Leftrightarrow x = -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Khi đó, ta lần lượt có:

- Với $x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, ta được tiếp tuyến (d_1) có dạng:

  $$(d_1): y = -x + 2\sqrt{2} - 5.$$

- Với $x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, ta được tiếp tuyến (d_1) có dạng:

  $$(d_2): y = -x - 2\sqrt{2} - 5.$$

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) của đồ thị hàm số thoả mãn điều kiện.

Cách 2: Gọi (d) là đường thẳng vuông góc với tiệm cận xiên, khi đó:

$$(d): y = -x + b.$$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số, khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + x - 1}{x + 2} = -x + b \\ 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2\sqrt{2} - 5 \\ b = -2\sqrt{2} - 5 \end{array}\right.$$

Khi đó, ta lần lượt có:

- Với $b = 2\sqrt{2} - 5$, ta được tiếp tuyến $(d_1): y = -x + 2\sqrt{2} - 5$.
- Với $b = -2\sqrt{2} - 5$, ta được tiếp tuyến $(d_2): y = -x - 2\sqrt{2} - 5$.

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) của đồ thị hàm số thoả mãn điều kiện.

Câu II.

1. Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0.$ (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \sin x.\frac{\cos x.\cos\dfrac{x}{2} + \sin x.\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x.\cos\dfrac{x}{2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x.\cos\dfrac{x}{2}}{\cos x.\cos\dfrac{x}{2}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x.\cos x} = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 4$$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{1}{2}$, thoả mãn (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

2. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + mx + 2 = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1/2 \\ h(x) = 3x^2 - (m-4)x - 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Từ đó, để phương trình ban đầu có 2 nghiệm thực phân biệt điều kiện là phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x \geq -\dfrac{1}{2}$, tức là:

$$-\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.h(-1/2) \geq 0 \\ S/2 > -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{4} + \dfrac{m-4}{2} - 1 \geq 0 \\ \dfrac{m-4}{6} > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{9}{2}.$$

Vậy, với $m > \dfrac{9}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu III. Chuyển phương trình đường thẳng (d_1) về dạng tham số:

$$(d_1):\begin{cases} x = 2u \\ y = 1 + u \\ z = -1 - u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

Các vectơ $\overrightarrow{u_1}(2; 1; -1)$, $\overrightarrow{u_2}(1; -2; 1)$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2).

1. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của (P) thì:

$$\begin{cases} (P)//(d_1) \\ (P)//(d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1 ; -3; -5).$$

Từ đó, phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P):\begin{cases} \text{Qua } A(0;1;2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(-1;-3;-5) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + 3y + 5z - 13 = 0.$$

2. Vì M thuộc (d_1), N thuộc (d_2) nên:

$M(2u; 1 + u; -1 - u)$, $N(1 + t; -1 - 2t; 2 + t)$.

Điều kiện để A, M, N thẳng hàng là:

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow (2u; u; -3 - u) = k(1 + t; -2 - 2t; t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2u}{1+t} = \frac{u}{-2-2t} = \frac{-3-u}{t} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow M(0; 1; -1), N(0; 1; 1).$$

Vậy, hai điểm M(0; 1; −1), N(0; 1; 1) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu IV.

1. Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x.dx}{e^{2x} + 2 - 3e^x}.$$

Đặt $t = e^x$, suy ra $dt = e^x.dx$.

Đổi cận:

- Với $x = \ln 3$ thì $t = 3$.
- Với $x = \ln 5$ thì $t = 5$.

Khi đó: $I = \int_3^5 \frac{dt}{t^2 - 3t + 2}$..

Ta có:

$$\frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{1}{(t-2)(t-1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-1} = \frac{(A+B)t - A - 2B}{(t-2)(t-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \int_3^5 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} \right) dt. = \left(\ln|t-2| - \ln|t-1| \right)\Big|_3^5 = \ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\Big|_3^5 = = \ln\frac{3}{2}.$$

2. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, xét các điểm M(x – 1 ; –y), N(x + 1 ; y), ta có:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{(x+1)^2+y^2} = OM + ON \geq MN = \sqrt{4+4y^2}$$

Từ đó, suy ra:

$$A \geq \sqrt{4+4y^2} + |y-2|.$$

Xét hàm số $f(y) = \sqrt{4+4y^2} + |y-2|$ theo hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $y < 2$ thì:

$$f(y) = 2\sqrt{1+y^2} - y + 2, \quad f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1,$$

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} = 2y \Leftrightarrow \begin{cases} 2y \geq 0 \\ 1+y^2 = 4y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$1/\sqrt{3}$		2
y'		–	0	+	0
y	$+\infty$	↘	CT $2+\sqrt{3}$	↗	

Trường hợp 2: Với $y \geq 2$ thì:

$$f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + y - 2 \geq 2\sqrt{1+y^2} \geq 2\sqrt{5} \geq 2+\sqrt{3}.$$

Từ đó, suy ra $A \geq 2+\sqrt{3}, \forall x, y$ nên $A_{Min} = 2+\sqrt{3}$ đạt được khi:

$$\begin{cases} y = 1/\sqrt{3} \\ M, N, O \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1/\sqrt{3} \\ x = 0 \end{cases}.$$

Câu V.a.

1. Đường tròn (C) có tâm I(1; 3).
Giả sử toạ độ tiếp điểm là $T(x_0; y_0)$, ta có:

$$\begin{cases} T \in (C) \\ MT \perp IT \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T \in (C) \\ \overrightarrow{MT}.\overrightarrow{IT} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 6y_0 + 6 = 0 \\ (x_0+3; y_0-1).(x_0-1; y_0-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 6y_0 + 6 = 0 \\ (x_0 + 3)(x_0 - 1) + (y_0 - 1)(y_0 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 6y_0 + 6 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + y_0 - 3 = 0. \qquad (*)$$

Toạ độ của T_1, T_2 thoả mãn (*) nên phương trình đường thẳng (T_1T_2) có dạng:

$$2x + y - 3 = 0.$$

2. Ta có kết quả "*Với tập hợp* A *gồm* n *phần tử thì số tập con gồm* k *phần tử của* A *bằng* C_n^k", từ đó:

$$C_n^4 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{20n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{1}{12} = \frac{20}{(n-3)(n-2)}$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 5n - 234 = 0 \Leftrightarrow n = 18, \text{ vì } n > 4.$$

Tới đây, bài toán được chuyển về tìm $k \in \{1, 2, ..., 18\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất, tức là tìm k để C_{18}^k lớn nhất. Ta xét:

$$\frac{C_{18}^{k+1}}{C_{18}^k} > 1 \Leftrightarrow \frac{18-k}{k+1} > 1 \Leftrightarrow k < 9$$

$$\Rightarrow C_{18}^0 < C_{18}^1 < ... < C_{18}^9 > C_{18}^{10} > ... > C_{18}^{18}$$

Vậy, số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất khi $k = 9$.

Câu V.b.

1. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_5(4^x + 144) - \log_5 2^4 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5 5 + \log_5(2^{x-2} + 1) + \log_5 2^4$$

$$\Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5[80(2^{x-2} + 1)]$$

$$\Leftrightarrow 4^x + 144 < 20.2^x + 80. \qquad (*)$$

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$, ta được:

$$t^2 - 20t + 64 < 0 \Leftrightarrow 4 < t < 16 \Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \Leftrightarrow 2 < x < 4.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $2 < x < 4$.

2. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

a. Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB).

Xét hai tam giác vuông ΔABM và ΔBCA, ta có:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\frac{AD}{2}}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \Delta ABM \text{ và } \Delta BCA \text{ đồng dạng}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{BAC} = \widehat{BCA} + \widehat{BAC} = 90^0$$

$$\Rightarrow \widehat{AIB} = 90^0 \Rightarrow MB \perp AC. \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có:

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$MB \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$, đpcm.

b. Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Gọi H là trung điểm AC, ta có:

$$NH \,//\, SA \text{ (đtb)} \Rightarrow NH \perp (ABI) \text{ và } NH = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$$

do đó: $V_{ANIB} = \frac{1}{3}NH.S_{\Delta ABI} = \frac{1}{6}NH.AI.BI.$ (3)

Trong ΔABM, ta có:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \quad (4)$$

Trong ΔABI, ta có:

$$BI^2 = AB^2 - AI^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad (5)$$

Thay (4), (5) vào (3), ta được: $V_{ANIB} = \frac{1}{6}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ ĐỂ LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số (C): $y = x^3 - x^2 - x + 1$.

Lập phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại các giao điểm của nó với trục hoành.

Bài 2. Cho hàm số (C_m): $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$.

a. Xác định m để (C_m) cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt C(0, 1), D, E.

b. Tìm m để các tiếp tuyến tại D và E vuông góc với nhau.

Bài 3. Cho hàm số (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (Δ): $3x - 5y - 4 = 0$.

Bài 4. Cho hàm số (C): $y = x^4 + x^2 - 2$.

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng (Δ): $6x + y - 1 = 0$.

Bài 5. Cho hàm số:

$$y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2.$$

Viết phương trình các tiếp tuyến kẻ từ gốc toạ độ tới đồ thị hàm số.

Bài 6. Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 + ax - 1}{x - 1}.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của nó với trục tung.

Bài 7. Cho hàm số:

$$y = \frac{4 + mx - 3x^2}{4x + m}.$$

Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = 0$ vuông góc với tiệm cận ?

Bài 8. Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}.$$

a. M là điểm trên đồ thị có hoành độ $x_M = a$. Viết phương trình tiếp tuyến (t_a) của đồ thị tại M.

b. Xác định a để (t_a) đi qua điểm (1, 0). Chứng tỏ rằng có hai giá trị của a thoả mãn điều kiện của bài toán, và hai tiếp tuyến tương ứng là vuông góc với nhau.

Bài 9. Cho hàm số (C): $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

Tìm trên đồ thị (C) các điểm sao cho tiếp tuyến tại đó của đồ thị vuông góc với tiệm cận xiên của nó.

Bài 10. Cho hàm số (C): $y = x + 1 + \frac{1}{x - 1}$.

Tìm những điểm trên đồ thị (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến tại điểm đó tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

Bài 11. Giải phương trình:

$$\cot x - \tan x = 2\tan 2x$$

Bài 12. Giải phương trình:

$$6\tan x + 5\cot 3x = \tan 2x.$$

Bài 13. Giải phương trình:

$$2\tan x + \cot x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}.$$

Bài 14. Giải phương trình:

$$3\tan 3x + \cot 2x = 2\tan x + \frac{2}{\sin 4x}.$$

Bài 15. Giải phương trình:

$$3\tan 2x - 4\tan 3x = \tan^2 3x.\tan 2x.$$

Bài 16. Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3.$

b. $(x + 5)(2 - x) = 3\sqrt{x^2 + 3x}$.

Bài 17. Giải phương trình:

$$\sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1} = 1.$$

Bài 18. Giải phương trình:

$$3\sqrt{x + 1} = 3x^2 - 8x + 3.$$

Bài 19. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m$$

Bài 20. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x + 12} = m(\sqrt{5 - x} + \sqrt{4 - x})$$

Bài 21. Cho điểm A(2; −3; 4) và hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) có phương trình:

$$(\Delta_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}, \quad (\Delta_2): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

a. Tìm góc giữa hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2).

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với cả (Δ_1), (Δ_2).

Bài 22. Cho ba đường thẳng (d'), (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d'): \frac{x}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{1-z}{-4},$$

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}, \quad (d_2): \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-2}.$$

a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(3; −1; 4) và cắt cả hai đường thẳng (d_1), (d_2).

c. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng (d') và cắt cả hai đường thẳng (d_1), (d_2).

Bài 23. Cho điểm A(4; −1; −1) và hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) có phương trình:

$$(\Delta_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}, \quad (\Delta_2): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

a. Chứng minh rằng hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) chéo nhau.

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A vuông góc với (Δ_1) và cắt (Δ_2).

Bài 24. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): 2x + y + z - 4 = 0,\ (d): \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Chứng minh rằng đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P).

b. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và tạo với (P) một góc lớn nhất.

c. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa (d) và tạo với (P) một góc α có $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{6}}{18}$.

d. Viết phương trình mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{174}$ tiếp xúc với (d) tại điểm M(−2; 3; 5) và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn.

e. Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{5}$ tiếp xúc với (d) tại điểm N(−2; 3; 5) và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng $r = \sqrt{\frac{29}{6}}$.

Bài 25. Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(d): \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{1},\ (P): 2x + 2y + z - 5 = 0.$$

a. Chứng minh rằng đường thẳng (d) cắt mặt phẳng (P) tại điểm A. Tìm toạ độ A, tính góc giữa (d) và (P).

b. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P).

c. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d).

d. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc có số đo nhỏ nhất.

e. Viết phương trình mặt cầu có bán kính bằng 3, tâm thuộc đường thẳng (d) và tiếp xúc với (P).

f. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d) và tiếp xúc với (P) tại điểm E(2; 0; 1).

Bài 26. Tính tích phân $I = \int_0^1 x^5(1-x^3)^6 dx$.

Bài 27. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x.dx}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}$.

b. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x.\cos^3 x.dx}{1 + \cos^2 x}$.

Bài 28. Tính các tích phân sau:

a. $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin 2x.dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$.

b. $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos 2x}$.

Bài 29. Tính các tích phân sau:

a. $\int_1^3 \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx$.

b. $\int_0^1 \frac{\ln(2-x)}{2-x} dx$.

Bài 30. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^e \frac{(1+\ln^2 x)dx}{x}$.

b. $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x+2}}$.

Bài 31. Cho điểm M(−4; −6) và đường tròn (C) có phương trình:

(C): $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$.

Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) đi qua M.

Bài 32. Cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với (Δ): $2x + y - 4 = 0$ một góc bằng 45^0.

Bài 33. Cho đường thẳng (d) và đường tròn (C) có phương trình:

(d): $x - y = 0$, (C): $x^2 + y^2 - x - 3y - 2 = 0$.

a. Chứng tỏ rằng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt E, F. Tìm toạ độ trung điểm H của EF.

b. Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với (d) tại H và tiếp xúc với (C).

c. Lập phương trình đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$, tiếp xúc với (d) và tiếp xúc ngoài với (C).

Bài 34. Cho đường thẳng (d) và đường tròn (S) có phương trình:

(d): $x - y = 0$, (S): $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$.

1. Chứng tỏ rằng (d) tiếp xúc với (S).
2. Lập phương trình đường thẳng song song với (d) và:
   a. Tiếp xúc với (S).
   b. Cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.
3. Lập phương trình đường thẳng tạo với (d) một góc 45^0 và tiếp xúc với (S).
4. Lập phương trình đường tròn có bán kính bằng $R' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tiếp xúc với (d) và tiếp xúc với (S).

Bài 35. Cho đường thẳng (d) và đường tròn (S) có phương trình:

(d): $x - y - 2 = 0$, (S): $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$.

1. Chứng tỏ rằng (d) không cắt (S). Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc H của tâm đường tròn (S) trên (d).
2. Lập phương trình đường thẳng vuông góc (d) và:
   a. Tiếp xúc với (S).
   b. Cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{6}$
3. Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với (d) tại H và tiếp xúc với (S).
4. Lập phương trình đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$, tiếp xúc với (d) và tiếp xúc với (S).

Bài 36. Giải các bất phương trình:

a. $\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3)$.

b. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) + 2\log_3(2 - x) \geq 0$.

Bài 37. Giải các bất phương trình:

a. $\dfrac{1 - \log_4 x}{1 + \log_4 x} \leq \dfrac{1}{2}$.

b. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$.

Bài 38. Cho bất phương trình:

$$\log_{\frac{1}{2}}[\log_2(3^x + 1)] > \log_2 \frac{1}{m}.$$

a. Giải bất phương trình với $m = 2$.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x < 0$.

Bài 39. Giải bất phương trình:

$$\log_x(3x - 1) > \log_x(x^2 + 1).$$

Bài 40. Giải bất phương trình:

$$\log_x(5x^2 - 8x + 3) > 2.$$

ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

Bài 1. Hoành độ giao điểm của (C) với Ox là nghiệm của phương trình :

$x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

- Tại điểm có hoành độ $x_1 = 1$, ta được tiếp tuyến (d_1) có phương trình :

$$(d_1): \ y = y'(1)(x - 1) + y(1) \Leftrightarrow (d_1): \ y = 0.$$

- Tại điểm có hoành độ $x_2 = -1$, ta được tiếp tuyến (d_2) có phương trình :

$$(d_2): \ y = y'(-1)(x + 1) + y(-1) \Leftrightarrow (d_2): \ y = 4(x + 1).$$

Bài 2.

a. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 1$ và đồ thị là :

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ g(x) = x^2 + 3x + m = 0 \quad (*) \end{bmatrix}.$$

Đồ thị (C_m) cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt C(0, 1), D, E

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq m < \frac{9}{4}. \qquad (**)$$

b. Với điều kiện (**), phương trình (*) có nghiệm thoả mãn :

$$\begin{cases} x_D + x_E = -3 \\ x_D x_E = m \end{cases}.$$

Ta có :

- Tiếp tuyến tại D có hệ số góc

$$k_D = y'(x_D) = 3x_D^2 + 6x_D + m = 3(x_D^2 + 3x_D + m) - 3x_D - 2m$$
$$= -3x_D - 2m.$$

- Tiếp tuyến tại E có hệ số góc

$$k_E = y'(x_E) = 3x_E^2 + 6x_E + m = 3(x_E^2 + 3x_E + m) - 3x_E - 2m$$
$$= -3x_E - 2m.$$

Các tiếp tuyến tại D và E vuông góc với nhau khi

$$k_D . k_E = -1 \Leftrightarrow (-3x_D - 2m)(-3x_E - 2m) = -1$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{8}, \text{ thoả mãn (**).}$$

Bài 3. Ta có thể trình bày theo các cách sau :

Cách 1 : Ta có :

$$y' = 3x^2 - 6x \text{ và hệ số góc của đường thẳng } (\Delta) \text{ bằng } \frac{3}{5}.$$

Do đó, hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình :

$$y'.\frac{3}{5} = -1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow 9x^2 - 18x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1/3 \\ x = 5/3 \end{array}\right.$$

- Với $x = \frac{1}{3}$, ta được tiếp tuyến (d_1) có dạng :

$$(d_1) : y = -\frac{5}{3}(x - \frac{1}{3}) + y(\frac{1}{3}) \Leftrightarrow (d_1) : y = -\frac{5}{3}x + \frac{61}{27}.$$

- Với $x = \frac{5}{3}$, ta được tiếp tuyến (d_1) có dạng :

$$(d_2) : y = -\frac{5}{3}(x - \frac{5}{3}) + y(\frac{5}{3}) \Leftrightarrow (d_2) : y = -\frac{5}{3}x + \frac{29}{27}.$$

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) của đồ thị thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2 : Gọi (d) là đường thẳng vuông góc với đường thẳng (Δ), khi đó :

$$(d) : y = -\frac{5}{3}x + b. \qquad (1)$$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số, khi hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = -\dfrac{5}{3}x + b \\ 3x^2 - 6x = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{61}{27} \\ b = \dfrac{29}{27} \end{cases}.$$

- Với $b = \dfrac{61}{27}$, ta được tiếp tuyến (d_1) : $y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{61}{27}$.
- Với $b = \dfrac{29}{27}$, ta được tiếp tuyến (d_2) : $y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{29}{27}$.

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) của đồ thị thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 4. Ta có thể trình bày theo các cách sau :

Cách 1 : Ta có :

$$y' = 4x^3 + 2x$$

và hệ số góc của đường thẳng (Δ) bằng -6.

Do đó, hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình :

$$y' = -6 \Leftrightarrow 4x^3 + 2x = -6 \Leftrightarrow 2x^3 + x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(2x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

- Với $x = -1$, ta được tiếp tuyến (d) có dạng :

$$(d) : y = -6(x + 1) + y(-1) \Leftrightarrow (d) : y = -6x - 6.$$

Vậy, tồn tại tiếp tuyến (d) của đồ thị thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2 : Gọi (d) là đường thẳng song song với đường thẳng (Δ), khi đó :

$$(d) : y = -6x + b.$$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số, khi hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^4 + x^2 - 2 = -6x + b \\ 4x^3 + 2x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow b = -6.$$

- Với $b = -6$, ta được tiếp tuyến (d) : $y = -6x - 6$.

Vậy, tồn tại tiếp tuyến (d) của đồ thị thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 5. Đường thẳng (d) đi qua O với hệ số góc k có phương trình :

$$(d) : y = kx. \qquad (1)$$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (C) khi hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 = kx \\ 2x^3 - x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 = 2x(2x^3 - x) \\ 2x^3 - x = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1/\sqrt{3} \end{array}\right. \\ k = 2x^3 - x \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = \mp \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \end{array}\right. .$$

- Với $k = 0$, ta được tiếp tuyến (d_1) : $y = 0$.
- Với $k = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, ta được tiếp tuyến (d_2) : $y = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}x$.
- Với $k = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, ta được tiếp tuyến (d_3) : $y = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}x$.

Vậy, qua O kẻ được ba tiếp tuyến (d_1), (d_2) , (d_3) tới đồ thị hàm số.

Bài 6. Toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số với Oy là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 + ax - 1}{x - 1} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow M(0, 1).$$

Tuyến của đồ thị tại điểm M(0, 1) có dạng :

(d) : $y = y'(0)x + 1 \Leftrightarrow$ (d) : $y = (1 - a)x + 1$.

Bài 7. Hàm số có :

- Tiệm cận đứng $4x + m = 0$ vì $\lim\limits_{x \to -\frac{m}{4}} y = \infty$.
- Tiệm cận xiên $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{7}{16}m$ vì $\lim\limits_{x \to \infty} (y + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{7}{16}m) = 0$.

Đạo hàm :

$$y' = \frac{-12x^2 - 6mx + m^2 - 16}{(4x + m)^2}.$$

Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị tại $x_0 = 0$ là

$$k = y'(0) = \frac{m^2 - 16}{m^2}.$$

Ta xét hai trường hợp :

Trường hợp 1 : Tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow \frac{m^2 - 16}{m^2} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4.$$

Trường hợp 2 : Tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}.k = -1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}.\frac{m^2 - 16}{m^2} = -1 \Leftrightarrow m^2 = -48 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ chỉ vuông góc với tiệm cận đứng khi $m = \pm 4$.

Bài 8.

a. Ta có: $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại M có hoành độ $x_M = a$ có dạng :

$$(t_a): \ y = y'(a)(x - a) + y(a) \Leftrightarrow (t_a): \ y = \frac{a^2 + 2a}{(a+1)^2}(x - a) + \frac{a^2 + 2a + 2}{a+1}$$

$$\Leftrightarrow (t_a): \ y = \frac{a^2 + 2a}{(a+1)^2}x + \frac{a^2 + 4a + 2}{(a+1)^2}.$$

b. Tiếp tuyến t_a đi qua điểm (1, 0) khi :

$$\frac{a^2 + 2a}{(a+1)^2} + \frac{a^2 + 4a + 2}{(a+1)^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

và theo định lí Vi - ét ta có : $\begin{cases} a_1 + a_2 = -3 \\ a_1.a_2 = 1 \end{cases}$.

Vậy, có hai giá trị của a thoả mãn điều kiện của bài toán.

Các tiếp tuyến có hệ số góc tương ứng: $k_1 = \dfrac{a_1^2 + 2a_1}{(a_1+1)^2}$, $k_2 = \dfrac{a_2^2 + 2a_2}{(a_2+1)^2}$.

Suy ra: $k_1.k_2 = \dfrac{a_1^2 + 2a_1}{(a_1+1)^2}\dfrac{a_2^2 + 2a_2}{(a_2+1)^2} = \dfrac{a_1^2a_2^2 + 2a_1a_2(a_1 + a_2) + 4a_1a_2}{(a_1a_2 + a_1 + a_2 + 1)^2} = -1$

chứng tỏ rằng hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Bài 9. Viết lại hàm số dưới dạng $y = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

Ta có : $y' = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

và tiệm cận xiên của đồ thị là $y = x + 1$ vì $\lim\limits_{x \to \infty}(y - x - 1) = 0$.

M là điểm tuỳ ý thuộc đồ thị có hoành độ bằng $a \neq -1$, khi đó hệ số góc của tiếp tuyến tại M là

$$k = y'(a) = \frac{a^2 + 2a}{(a+1)^2}.$$

Tiếp tuyến (d) vuông góc với tiệm cận xiên

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + 2a}{(a+1)^2} = -1 \Leftrightarrow a = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy, tồn tại hai điểm có hoành độ tương ứng là $-1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ trên đồ thị thoả mãn điều kiện.

Bài 10. Ta có $y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$.

- Tiệm cận đứng $x = 1$ vì $\lim\limits_{x\to 1} y = \infty$.
- Tiệm cận xiên $y = x + 1$ vì $\lim\limits_{x\to\infty} (y - x - 1) = 0$.
- Toạ độ giao điểm I của hai tiệm cận là I(1, 2)

Điểm $M(a, y(a)) \in (C)$ với $a > 1$, khi đó phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$(d): \ y = y'(a)(x - a) + y(a) \Leftrightarrow (d): \ y = \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2}(x - a) + \frac{a^2}{a-1}.$$

Toạ độ giao điểm A của tiếp tuyến (d) và tiệm cận đứng là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2}(x-a) + \frac{a^2}{a-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{2a}{a-1} \end{cases} \Leftrightarrow A(1, \frac{2a}{a-1}).$$

Toạ độ giao điểm B của tiếp tuyến (d) và tiệm cận xiên là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2}(x-a) + \frac{a^2}{a-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - 1 \\ y = 2a \end{cases} \Leftrightarrow B(2a - 1, 2a).$$

Ta có: $AI = |y_A - y_I| = |\frac{2a}{a-1} - 2| = \frac{2}{|a-1|}$,

$$BI^2 = (x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2 = (2a-2)^2 + (2a-2)^2 = 8(a-1)^2$$

$$\Rightarrow BI = 2\sqrt{2}\,|a - 1|,$$

$$AI.BI = \frac{2}{|a-1|}.2\sqrt{2}\,|a-1| = 4\sqrt{2},$$

$$AB^2 = AI^2 + BI^2 - 2AI.BI.\cos\frac{\pi}{4} = AI^2 + BI^2 - \sqrt{2}\,AI.BI.$$

Chu vi ΔABI được cho bởi :

$$CV = AI + BI + \sqrt{AB^2} = AI + BI + \sqrt{AI^2 + BI^2 - \sqrt{2}AI.BI}$$

$$\geq 2\sqrt{AI.BI} + \sqrt{2AI.BI - \sqrt{2}AI.BI} = 4\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}.$$

Suy ra $CV_{min} = 4\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$, đạt được khi :

$$AI = BI \Leftrightarrow \frac{2}{|a-1|} = 2\sqrt{2}\,|a-1| \Leftrightarrow a = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Vậy, toạ độ của điểm M cần tìm là $M(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 2 + \sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$.

Bài 11. Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\cot 2x = 2\tan 2x \Leftrightarrow \cot 2x = \tan 2x \Leftrightarrow \cot 2x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - 2x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm

Bài 12. Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin 3x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\\ 3x \neq k\pi\\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x \neq \frac{k\pi}{3}\\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$5(\tan x + \cot 3x) = \tan 2x - \tan x$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \frac{\sin x}{\cos 2x.\cos x} \Leftrightarrow \frac{5\cos 2x}{\cos x.\sin 3x} = \frac{\sin x}{\cos 2x.\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2 2x = \sin 3x.\sin x \Leftrightarrow 5\cos^2 2x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$$

$$\Leftrightarrow 10\cos^2 2x = \cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) \Leftrightarrow 12\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\cos 2x = \frac{1}{3} = \cos 2\alpha\\ \cos 2x = -\frac{1}{4} = \cos 2\beta\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2x = \pm 2\alpha + 2k\pi\\ 2x = \pm 2\beta + 2k\pi\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x = \pm\alpha + k\pi\\ x = \pm\beta + k\pi\end{bmatrix}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có bốn họ nghiệm.

Bài 13. Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\tan x + (\tan x + \cot x) = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \tan x + \frac{2}{\sin 2x} = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Bài 14. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 4x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{k\pi}{4} \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(\tan 3x - \tan x) + (\tan 3x + \cot 2x) = \frac{2}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin 2x}{\cos 3x.\cos x} + \frac{\cos x}{\cos 3x.\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin 4x.\sin x + 2\cos 2x.\cos x = 2\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin 4x.\sin x + \cos 3x + \cos x = 2\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin 4x.\sin x = \cos 3x - \cos x \Leftrightarrow 8\sin 2x.\cos 2x.\sin x = -2\sin 2x.\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{4} = \cos 2\alpha \Leftrightarrow 2x = \pm 2\alpha + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm

Bài 15. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbf{Z}. \qquad (I)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3(\tan 2x - \tan 3x) = \tan 3x + \tan^2 3x.\tan 2x$$

$$\Leftrightarrow 3(\tan 2x - \tan 3x) = (1 + \tan 3x.\tan 2x)\tan 3x \qquad (*)$$

Nếu $1 + \tan 3x.\tan 2x = 0$ thì (*) tương đương với

$$\begin{cases} 1 + \tan 3x.\tan 2x = 0 \\ \tan 2x - \tan 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \tan^2 3x = 0 \\ \tan 2x = \tan 3x \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan 3x.\tan 2x \neq 0$$

do đó (*) có dạng:

$$\frac{3(\tan 2x - \tan 3x)}{1 + \tan 3x.\tan 2x} = \tan 3x \Leftrightarrow -3\tan x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

$\Leftrightarrow 5\tan^3 x - 3\tan x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tan x = 0 \\ \tan^2 x = \dfrac{3}{5} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tan x = 0 \\ \tan x = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{5} = \tan(\pm\alpha) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = k\pi \\ x = \pm\alpha + k\pi \end{bmatrix}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 16.

a. Đặt $t = x^2 - 3x + 3$, ta có:

$$t = (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

do đó điều kiện cho ẩn phụ t là $t \geq \dfrac{3}{4}$

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+3} = 3 \Leftrightarrow t + t + 3 + 2\sqrt{t(t+3)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{t(t+3)} = 3 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ t(t+3) = (3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = 2 \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 1, x = 2.

b. Điều kiện:

$$x^2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \leq -3 \\ x \geq 0 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2 + 3x} - 10 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}$, điều kiện $t \geq 0$. (2)

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 2 \\ t = -5 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} t = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 4 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -4 \end{bmatrix}, \text{ thoả mãn (1).}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 1 và x = − 4.

Bài 17. Điều kiện :

$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ 4x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Nhận xét rằng: số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1}$ và đường thẳng y = 1.

Xét hàm số $y = \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1}$:

- Miền xác định $D = [\frac{1}{2}, +\infty)$.
- Đạo hàm :

$$y' = \frac{2}{\sqrt{4x-1}} + \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}} > 0, \forall x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{hàm số luôn đồng biến.}$$

Do đó, phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Thấy $x = \frac{1}{2}$ thoả mãn phương trình.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

Bài 18. Điều kiện :

$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Viết lại phương trình dưới dạng :

$$3\sqrt{x+1} - 3x^2 + 8x - 3 = 0. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = 3\sqrt{x+1} - 3x^2 + 8x - 3$ trên $D = [-1, +\infty)$, ta có :

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x+1}} - 6x + 8,$$

$$f''(x) = -\frac{3}{4\sqrt{(x+1)^3}} - 6 < 0, \forall x \in D \Rightarrow \text{hàm số lồi trên D.}$$

Vậy phương trình (1) nếu có nghiệm sẽ có không quá hai nghiệm, ta có :

$f(0) = f(3) = 0$.

Do đó phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 3$.

Chú ý : Đương nhiên bài toán trên có thể được thực hiện bằng phương pháp biến đổi tương đương, cụ thể :

Biến đổi tương đương phương trình về dạng :

$$\begin{cases} 3x^2 - 8x + 3 \geq 0 \\ 9(x+1) = (3x^2 - 8x + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8x + 3 \geq 0 \\ 9x^4 - 48x^3 + 82x^2 - 57x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8x + 3 \geq 0 \\ x(x-3)(9x^2 - 21x + 19) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8x + 3 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 3$.

Bài 19. Xét hàm số:

$$y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}.$$

- Miền xác định D = **R**.
- Đạo hàm :

$$y' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{x^2+x+1} = (2x+1)\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(2x+1) > 0 \\ (2x-1)^2(x^2+x+1) = (2x+1)^2(x^2-x+1) \end{cases} (vn),$$

Ta có $y'(0) = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến.

Giới hạn :

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} = 1.$$

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	-1	↗	1

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m < 1$.

Bài 20. Điều kiện :

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x+12 \ge 0 \\ 5-x \ge 0 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 4. \qquad (1)$$

Viết lại phương trình dưới dạng :

$$(x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x}) = m. \qquad (2)$$

Xét hàm số $y = f(x) = (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x})$.

- Miền xác định D = [0, 4].

Nhận xét rằng :

- Hàm số $h(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}$ đồng biến trên D.
- Hàm số $g(x) = \sqrt{5-x} - \sqrt{4-x}$ có :

$$g'(x) = \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x}}{2\sqrt{5-x}.\sqrt{4-x}} > 0,\ \forall x \in D \Rightarrow \text{là hàm đồng biến trên D.}$$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x) = h(x)g(x)$ là hàm đồng biến trên D.

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$f(0) \le m \le f(4) \Leftrightarrow \sqrt{12}\,(\sqrt{5} - \sqrt{4}) \le m \le 12.$$

Bài 21.

a. Ta có:

- Đường thẳng (Δ_1) có vtcp $\vec{v_1}(2; -1; 1)$ và đi qua điểm $M_1(1; 3; 2)$.
- Đường thẳng (Δ_2) có vtcp $\vec{v_2}(-2; 1; 3)$ và đi qua điểm $M_2(3; 1; 1)$.

Côsin góc α giữa hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) được cho bởi:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v_1}.\vec{v_2}|}{|\vec{v_1}|.|\vec{v_2}|} = \frac{|2(-2) - 1.1 + 1.3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}.\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

b. Gọi (d) là đường thẳng cần dựng, ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử (d) có vtcp $\vec{u}$, ta có:

$$\begin{cases}(d) \perp (\Delta_1)\\ (d) \perp (\Delta_2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u} \perp \vec{v_1}\\ \vec{u} \perp \vec{v_2}\end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\vec{v_1}, \vec{v_2}] = (-4; -8; 0) \text{ chọn } \vec{u}(1; 2; 0).$$

Từ đó, ta có:

$$(d): \begin{cases}\text{Qua } A(2; -3; 4)\\ \text{vtcp } \vec{u}(1; 2; 0)\end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases}x = 2 + t\\ y = -3 + 2t\\ z = 4\end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Ta lần lượt:

- Gọi (P_1) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d_1) thì:

$$(P_1): \begin{cases}\text{Qua } A(2; -3; 4)\\ \text{vtpt } \vec{v_1}(2; -1; 1)\end{cases} \Leftrightarrow (P_1): 2x - y + z - 11 = 0.$$

- Gọi (P_2) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d_2) thì:

$$(P_2): \begin{cases}\text{Qua } A(2; -3; 4)\\ \text{vtpt } \vec{v_1}(-2; 1; 3)\end{cases} \Leftrightarrow (P_2): 2x - y - 3z + 5 = 0.$$

Khi đó, đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 11 = 0 \\ 2x - y - 3z + 5 = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (*) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ 2t - y + z - 11 = 0 \\ 2t - y - 3z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -7 + 2t \\ z = 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần dựng.

Bài 22.

a. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(1; 2; 1)$ và đi qua điểm $M_1(1; 3; -2)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(3; -1; -2)$ và đi qua điểm $M_2(2; 1; 1)$.

Khi đó, ta có:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|} = \frac{\left|(-3; 5; -7)(1; -2; 3)\right|}{\left|(-3; 5; -7)\right|} = \frac{34}{83}.$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình các đường thẳng (d_1), (d_2) về dạng tham số:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}), \quad (d_2): \begin{cases} x = 2 + 3u \\ y = 1 - u \\ z = 1 - 2u \end{cases} (u \in \mathbb{R}).$$

Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng và (d) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại các điểm B, C. Khi đó:

- Điểm $B \in (d_1)$ suy ra B(1 + t; 3 + 2t; t − 2).
- Điểm $C \in (d_2)$ suy ra C(2 + 3u; 1 − u; 1 − 2u).
- Ba điểm A, B, C thẳng hàng ta được:

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{t-2}{3u-1} = \frac{2t+4}{2-u} = \frac{t-6}{-2u-3} \Leftrightarrow t = u = 0 \Rightarrow B(1;3;-2).$$

Khi đó, đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(3;-1;4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(-2;4;-6) \text{ chọn } (1;-2;3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), trong đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (d_1) \subset (P_1) \end{cases} \text{ và } (P_2): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (d_2) \subset (P_2) \end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (P_1) được cho bởi:

$$(P_1):\begin{cases}\text{Qua } A(3;-1;4)\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_1} \text{ và } \vec{u_1}\end{cases}\Leftrightarrow (P_1):\begin{cases}\text{Qua } A(3;-1;4)\\ \text{vtpt } \vec{n_1}=[\overrightarrow{AM_1},\ \vec{u_1}]=(16;-4;-8)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_1)$: $4x - y - 2z - 5 = 0$.

- Phương trình mặt phẳng (P_2) được cho bởi:

$$(P_2):\begin{cases}\text{Qua } A(3;-1;4)\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_2} \text{ và } \vec{u_2}\end{cases}\Leftrightarrow (P_2):\begin{cases}\text{Qua } A(3;-1;4)\\ \text{vtpt } \vec{n_2}=[\overrightarrow{AM_2},\ \vec{u_2}]=(-7;-11;-5)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_2)$: $7x + 11y + 5z - 30 = 0$.

Vậy, đường thẳng (d) chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases}4x-y-2z-5=0\\ 7x+11y+5z-30=0\end{cases}. \qquad (1)$$

Bằng việc đặt $x = t$, ta biến đổi hệ (1) về dạng:

$$\begin{cases}x=t\\ 4t-y-2z-5=0\\ 7t+11y+5z-30=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\ y=5-2t\\ z=-5+3t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần dựng.

☞ ***Lưu ý***: Chúng ta có thể tối ưu lời giải trong cách 2 như sau:

Giả sử (d) với vtcp $\vec{u}$ là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2), trong đó:

$$(P_1):\begin{cases}\text{Qua } A\\ (d_1)\subset(P_1)\end{cases}\text{ và }(P_2):\begin{cases}\text{Qua } A\\ (d_2)\subset(P_2)\end{cases}.$$

- Mặt phẳng (P_1) có vtpt $\vec{n_1}$ được cho bởi:

$$\vec{n_1}=[\overrightarrow{AM_1},\ \vec{u_1}]=(16;-4;-8) \text{ chọn } \vec{n_1}(4;-1;-2).$$

- Mặt phẳng (P_2) có vtpt $\vec{n_2}$ được cho bởi:

$$\vec{n_2}=[\overrightarrow{AM_2},\ \vec{u_2}]=(-7;-11;-5) \text{ chọn } \vec{n_2}(7;11;5).$$

- vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) được cho bởi:

$$\vec{u}=\left[\vec{n_1},\vec{n_2}\right]=(17;-34;48) \text{ chọn } \vec{u}(1;-2;3).$$

Khi đó, đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } A(3;-1;4)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(-2;4;-6) \text{ chọn } (1;-2;3)\end{cases}\Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=3+t\\ y=-1-2t\\ z=4+3t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Cách 3: Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng và (d) cắt (d_2) tại C.

- Gọi (P_1) là mặt phẳng qua A và chứa (d_1), ta có:

$$(P_1):\begin{cases}\text{Qua } A(3;-1;4)\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_1} \text{ và } \overrightarrow{u_1}\end{cases}\Leftrightarrow (P_1):\begin{cases}\text{Qua } A(3;-1;4)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1}=[\overrightarrow{AM_1},\overrightarrow{u_1}]=(16;-4;-8)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_1)$: $4x - y - 2z - 5 = 0$.

- Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-2}\\ 4x-y-2z-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-3y\\ z=2y-1\\ 4(5-3y)-y-2(2y-1)-5=0\end{cases}\Rightarrow C(2;1;1).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } A(3;-1;4)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AC}(-1;2;-3)\end{cases}\Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=3-t\\ y=-1+2t\\ z=4-3t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Cách 4: Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng và (d) cắt (d_1) tại B.

- Gọi (P_2) là mặt phẳng qua A và chứa (d_2), ta có:

$$(P_2):\begin{cases}\text{Qua } A(3;-1;4)\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_2} \text{ và } \overrightarrow{u_2}\end{cases}\Leftrightarrow (P_2):\begin{cases}\text{Qua } A(3;-1;4)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1}=[\overrightarrow{AM_2},\overrightarrow{u_2}]=(-7;-11;-5)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_2)$: $7x + 11y + 5z - 30 = 0$.

- Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{1}\\ 7x+11y+5z-30=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x+1\\ z=x-3\\ 7x+11(2x+1)+5(x-3)-30=0\end{cases}\Rightarrow B(1;3;-2).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } A(3;-1;4)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(-2;4;-6) \text{ chọn } (1;-2;3)\end{cases}\Leftrightarrow (d):\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{3}.$$

c. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình các đường thẳng (d_1), (d_2) về dạng tham số.

$$(d_1):\begin{cases}x=1+t\\ y=3+2t\\ z=-2+t\end{cases}(t\in\mathbb{R}),\quad (d_2):\begin{cases}x=2+3u\\ y=1-u\\ z=1-2u\end{cases}(u\in\mathbb{R}).$$

Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng và (Δ) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại các điểm E, F. Khi đó:

- Điểm $E \in (d_1)$ suy ra $E(1 + t; 3 + 2t; t - 2)$.
- Điểm $F \in (d_2)$ suy ra $F(2 + 3u; 1 - u; 1 - 2u)$.

- Vì EF song song với đường thẳng (d') có vtcp $\vec{u'}(3;3;-4)$ ta được:

$$\overrightarrow{EF} = k\vec{u'} \Leftrightarrow \frac{3u-t+1}{3} = \frac{-u-2t-2}{3} = \frac{-2u-t+3}{-4} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow E(2;5;-1).$$

Khi đó, đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } E(2;5;-1) \\ \text{vtcp } \vec{u'}(3;3;-4) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 5+3t \\ z = -1-4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng, khi đó (Δ) là giao tuyến của hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2), trong đó:

$$(Q_1): \begin{cases} (d') // (Q_1) \\ (d_1) \subset (Q_1) \end{cases} \text{ và } (Q_2): \begin{cases} (d') // (Q_2) \\ (d_2) \subset (Q_2) \end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (Q_1) được cho bởi:

$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;3;-2) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u'} \text{ và } \vec{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;3;-2) \\ \text{vtpt } \vec{n_{Q1}} = [\vec{u'}, \vec{u_1}] = (11;-7;3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (Q_1): 11x - 7y + 3z + 16 = 0.$$

- Phương trình mặt phẳng (Q_2) được cho bởi:

$$(Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(2;1;1) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u'} \text{ và } \vec{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(2;1;1) \\ \text{vtpt } \vec{n_{Q2}} = [\vec{u'}, \vec{u_1}] = (-10;-6;-12) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (Q_2): 5x + 3y + 6z - 19 = 0.$$

Vậy, đường thẳng (Δ) chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 11x - 7y + 3z + 16 = 0 \\ 5x + 3y + 6z - 19 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Bằng việc đặt x = 3t + 2, ta biến đổi hệ (2) về dạng:

$$\begin{cases} x = 3t+2 \\ 11(3t+2) - 7y + 3z + 16 = 0 \\ 5(3t+2) + 3y + 6z - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 5+3t \\ z = -1-4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (Δ) cần dựng.

Cách 3: Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng và (Δ) cắt (d_2) tại F.

- Gọi (Q_1) là mặt phẳng song song với (d') và chứa (d_1), ta có:

$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;3;-2) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u'} \text{ và } \vec{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;3;-2) \\ \text{vtpt } \vec{n_{Q1}} = [\vec{u'}, \vec{u_1}] = (11;-7;3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (Q_1): 11x - 7y + 3z + 16 = 0.$$

- Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-2} \\ 11x-7y+3z+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-3y \\ z=2y-1 \\ 11(5-3y)-7y+3(2y-1)+16=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow F(-1;2;3)$.

Vậy, phương trình đường thẳng (Δ) có dạng:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } F(-1;2;3) \\ \text{vtcp } \vec{u'}(3;3;-4) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-4}.$$

Cách 4: Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng và (Δ) cắt (d_1) tại E.

- Gọi (Q_2) là mặt phẳng song song với (d') và chứa (d_2), ta có:

$$(Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(2;1;1) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u'} \text{ và } \vec{u_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(2;1;1) \\ \text{vtpt } \vec{n_{Q2}}=[\vec{u'},\ \vec{u_1}]=(-10;-6;-12) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (Q_2)$: $5x + 3y + 6z - 19 = 0$.

- Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{1} \\ 5x+3y+6z-19=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ z=x-3 \\ 5x+3(2x+1)+6(x-3)-19=0 \end{cases} \Rightarrow E(2;5;-1).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (Δ) có dạng:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } E(2;5;-1) \\ \text{vtcp } \vec{u'}(3;3;-4) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+1}{-4}.$$

Bài 23.

a. Ta có:

- Đường thẳng (Δ_1) có vtcp $\vec{v_1}(2;-1;1)$ và đi qua điểm $M_1(1;3;2)$.
- Đường thẳng (Δ_2) có vtcp $\vec{v_2}(-2;1;3)$ và đi qua điểm $M_2(3;1;1)$.

Nhận xét rằng:

$\left[\vec{v_1}, \vec{v_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}=8 \Rightarrow (\Delta_1)$ và (Δ_2) chéo nhau.

b. Gọi (d) là đường thẳng cần dựng, ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình đường thẳng (Δ_2) về dạng tham số:

$$(\Delta_2): \begin{cases} x=3-2u \\ y=1+u \\ z=1+3u \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

Giả sử (d) cắt (Δ_2) tại điểm N, khi đó:

- Điểm $N \in (\Delta_2)$ suy ra $N(3 - 2u; 1 + u; 1 + 3u)$.
- Điều kiện để (d) vuông góc với đường thẳng (Δ_1) là:

$$\overrightarrow{AN} \perp \vec{v}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\vec{v}_1 = 0 \Leftrightarrow 2(-1 - 2u) - (2 + u) + 2 + 3u = 0$$

$$\Leftrightarrow -2u - 2 = 0 \Leftrightarrow u = -1 \Rightarrow N(5; 0; -2).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AN}(1;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

Cách 2: Ta lần lượt:

- Gọi (R_1) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (Δ_1) thì:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{vtpt } \vec{v}_1(2;-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x - y + z - 8 = 0.$$

- Gọi (R_2) là mặt phẳng đi qua A và chứa (Δ_2) thì:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM_2} \text{ và } \vec{v}_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (R_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{AM_2}, \vec{v}_2] = (4;-1;3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (R_2): 4x - y + 3z - 14 = 0.$$

Khi đó, đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 8 = 0 \\ 4x - y + 3z - 14 = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (*) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ 2t - y + z - 8 = 0 \\ 4t - y + 3z - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -5 + t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần dựng.

☞ ***Lưu ý***: Chúng ta có thể tối ưu lời giải trong cách 2 như sau:

Giả sử (d) với vtcp $\vec{u}$ là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (R_1) và (R_2), trong đó:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (\Delta_1) \perp (R_1) \end{cases} \text{ và } (R_2): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (\Delta_2) \subset (R_2) \end{cases}.$$

- Mặt phẳng (R_1) có vtpt $\vec{v_1}(2;-1;1)$.
- Mặt phẳng (R_2) có vtpt $\vec{n_2}$ được cho bởi:

$$\vec{n_2} = [\vec{AM_2}, \vec{v_2}] = (4;-1;3).$$

- vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) được cho bởi:

$$\vec{u} = \left[\vec{v_1}, \vec{n_2}\right] = (1;1;-1).$$

Khi đó, đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{vtcp } \vec{u}(1;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

Cách 3: Ta lần lượt:

- Gọi (R_1) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (Δ_1) thì:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{vtpt } \vec{v_1}(2;-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x - y + z - 8 = 0.$$

- Mặt phẳng (R_1) cắt (Δ_2) tại điểm N thì toạ độ của N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{3} \\ 2x - y + z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y - z = 2 \\ 2x - y + z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow N(5;0;-2).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;-1) \\ \text{vtcp } \vec{AN}(1;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

☞ ***Chú ý***: Các em học sinh đều biết rằng còn có một cách khác để thực hiện câu a), đó việc xét hệ tạo bởi (Δ_1) và (Δ_2).

Bài 24.

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) bằng cách thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

$$2(1 - 3t) + (1 + 2t) + (1 + 4t) - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Tức hệ có vô số nghiệm, do đó (d) nằm trong (P).

Cách 2: Đường thẳng (d) đi qua hai điểm A(1; 1; 1) và B(−2; 3; 5).

Nhận xét rằng A, B cũng thuộc (P) nên (d) nằm trong (P).

Cách 3: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-3;2;4)$ và đi qua điểm A(1; 1; 1).

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(2;1;1)$.

Nhận xét rằng:

$\vec{u}.\vec{n} = -3.2 + 2.1 + 4.1 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$. (1)

$2.1 + 1 + 1 - 4 = 0 \Rightarrow A \in (P)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra (d) nằm trong (P).

b. Mặt phẳng (Q) chứa (d) và tạo với (P) một góc lớn nhất chính là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P). Ta lần lượt có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-3; 2; 4)$ và đi qua điểm A(1; 1; 1).
- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(2; 1; 1)$.
- Mặt phẳng (Q) có vtpt $\vec{n_Q}$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \vec{n_Q} \perp \vec{u} \\ \vec{n_Q} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \vec{n_Q} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (-2; 11; -7).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtpt } \vec{n_Q}(-2; 11; -7) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2x - 11y + 7z + 2 = 0.$$

c. Giả sử mặt phẳng (R) có vtpt $\vec{n_R}(a; b; c) \neq \vec{0}$, ta lần lượt:

- Để (R) chứa (d) điều kiện là:

$$\vec{n_R} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{n_R}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b - 4c = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}(3a - 4c).$$

- (R) tạo với (P) một góc α có $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{6}}{18}$ điều kiện là:

$$\frac{|a.2 + b.1 + c.1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5\sqrt{6}}{18} \Leftrightarrow \frac{|2a + b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow 9(2a + b + c)^2 = 25(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 9\left[2a + \frac{1}{2}(3a - 4c) + c\right]^2 = 25\left[a^2 + \frac{1}{4}(3a - 4c)^2 + c^2\right]$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 3ac - 4c^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a = c \\ a = -4c \end{bmatrix}.$$

Khi đó:

- Với a = c thì chọn c = 2 ta được b = −1 nên $\vec{n_R}(2; -1; 2)$, từ đó:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtpt } \vec{n_R}(2; -1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x - y + 2z - 3 = 0.$$

- Với $a = -4c$ thì chọn $c = -1$ ta được $b = 8$ nên $\overrightarrow{n_R}(4; 8; -1)$, từ đó:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(4; 8; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): 4x + 8y - z - 11 = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (R_1), (R_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm mặt cầu (S) cần dựng, khi đó:

$$\begin{cases} I \in (P) \\ MI \perp (d) \\ MI = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (P) \\ \overrightarrow{MI}.\vec{u} = 0 \\ IM^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z - 4 = 0 & (1) \\ -3(x + 2) + 2(y - 3) + 4(z - 5) = 0 & (2) \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 174 & (3) \end{cases}$$

Biến đổi (1) và (2) về dạng:

$$\begin{cases} 2x + y + z - 4 = 0 \\ 3x - 2y - 4z + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -11x - 16 \\ 2z = 7x + 24 \end{cases} \quad (*)$$

Thay (*) vào (3) ta được:

$4(x + 2)^2 + (-11x - 16 - 6)^2 + (7x + 24 - 10)^2 = 4 \times 174$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -4$.

Khi đó:

- Với $x = 0$ thì $y = -8$, $z = 12$ nên $I_1(0; -8; 12)$, từ đó ta được:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(0; -8; 12) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{174} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): x^2 + (y + 8)^2 + (z - 12)^2 = 174.$$

- Với $x = -4$ thì $y = 14$, $z = -2$ nên $I_2(-4; 14; -2)$, từ đó ta được:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(-4; 14; -2) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{174} \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x + 4)^2 + (y - 14)^2 + (z + 2)^2 = 174.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Giả sử I là tâm mặt cầu (S) cần dựng, khi đó I thuộc đường thẳng (Δ) có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}$ nằm trong (P) và vuông góc với (d) tại M.

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (-2; 11; -7).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M(-2;3;5) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta}(-2;11;-7) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 3 + 11t \\ z = 5 - 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Từ đó tâm $I(-2-2t;\ 3+11t;\ 5-7t)$ và điều kiện:

$MI = R \Leftrightarrow MI^2 = R^2 \Leftrightarrow (-2t)^2 + (11t)^2 + (-7t)^2 = 174 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1.$

Khi đó:

- Với $t = -1$ thì $x = 0,\ y = -8,\ z = 12$ nên $I_1(0; -8; 12)$, từ đó ta được:

$$(S_1):\ \begin{cases} \text{Tâm } I_1(0;-8;12) \\ \text{Bán kính } R=\sqrt{174} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1):\ x^2 + (y+8)^2 + (z-12)^2 = 174.$$

- Với $t = 1$ thì $x = -4,\ y = 14,\ z = -2$ nên $I_2(-4; 14; -2)$, từ đó ta được:

$$(S_2):\ \begin{cases} \text{Tâm } I_2(-4;14;-2) \\ \text{Bán kính } R=\sqrt{174} \end{cases} \Leftrightarrow (S_2):\ (x+4)^2 + (y-14)^2 + (z+2)^2 = 174.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. Giả sử $K(x; y; z)$ là tâm mặt cầu (T) cần dựng, khi đó ta lần lượt có:

- Vì $NK \perp (d)$ nên:

$$\vec{NK}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -3(x+2) + 2(y-3) + 4(z-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2y - 4z + 32 = 0. \qquad (4)$$

- Vì $NK = R$ nên:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 5. \qquad (5)$$

- Vì $d(K, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2}$ nên:

$$\frac{|2x+y+z-4|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \sqrt{5-\frac{29}{6}}$$

$$\Leftrightarrow |2x+y+z-4| = 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x+y+z-5=0 \\ 2x+y+z-3=0 \end{bmatrix}.$$

Từ đó:

- Với $2x + y + z - 5 = 0$ kết hợp với (4) ta được:

$$\begin{cases} 2y = -11x - 12 \\ 2z = 7x + 22 \end{cases}. \qquad (I)$$

Thay (I) vào (5) ta được:

$$4(x+2)^2 + (-11x - 12 - 6)^2 + (7x + 22 - 10)^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow 174x^2 + 580x + 464 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 = -2 \Rightarrow K_1(-2; 5; 4) \\ x_2 = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow K_2\left(-\dfrac{4}{3}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{19}{3}\right) \end{bmatrix}.$$

- Với $2x + y + z - 3 = 0$ kết hợp với (4) ta được:

$$\begin{cases} 2y = -11x - 20 \\ 2z = 7x + 26 \end{cases}. \qquad (II)$$

Thay (II) vào (5) ta được:

$$4(x+2)^2+(-11x-20-6)^2+(7x+26-10)^2=20$$

$$\Leftrightarrow 174x^2+812x+928=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=-2 \Rightarrow K_3(-2;1;6) \\ x_4=-\dfrac{8}{3} \Rightarrow K_4\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{14}{3};\dfrac{11}{3}\right) \end{cases}.$$

Khi đó:

- Với tâm K_1, từ đó ta được mặt cầu (T_1) có phương trình:

  (T_1): $(x+2)^2+(y-5)^2+(z-4)^2=5$.
- Với tâm K_2, từ đó ta được mặt cầu (T_2) có phương trình:

  $$(T_2):\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+\left(z-\frac{19}{3}\right)^2=5.$$
- Với tâm K_3, từ đó ta được mặt cầu (T_3) có phương trình:

  (T_3): $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=5$.
- Với tâm K_4, từ đó ta được mặt cầu (T_4) có phương trình:

  $$(T_4):\left(x+\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{14}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=5.$$

Vậy, tồn tại bốn mặt cầu (T_1), (T_2), (T_3), (T_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 25. Ta có:

- Đường thẳng (d) đi qua điểm M(2; 4; 2) và có vtcp $\vec{u}(1;3;1)$.
- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(2;2;1)$.

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P):

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-2}{1} \\ 2x+2y+z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-2 \\ z=x \\ 2x+2(3x-2)+x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}.$$

Vậy, ta thấy (d) cắt (P) tại điểm A(1; 1; 1).

Gọi α là góc tạo bởi (d) và (P), ta có:

$$\sin\alpha=\frac{|2.1+2.3+1.1|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}.\sqrt{1^2+3^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{11}}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (P), ta có:

$$(MH):\begin{cases} \text{Qua M} \\ MH\perp(P) \end{cases} \Leftrightarrow (MH):\begin{cases} \text{Qua } M(2;4;2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (MH):\begin{cases} x=2+2t \\ y=4+2t \\ z=2+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

Vì $\{H\} = (MH) \cap (P)$ nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = 2 + t \\ 2x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = 2 + t \\ 2(2 + 2t) + 2(4 + 2t) + (2 + t) - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(0; 2; 1).$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; 1) \\ \text{Qua } H(0; 2; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH}(-1;1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Gọi H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của M trên (P), ta có:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH} // \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH} = k\vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z - 5 = 0 \\ x - 2 = 2k \\ y - 4 = 2k \\ z - 2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ k = -1 \end{cases} \Rightarrow H(0; 2; 1).$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; 1) \\ \text{Qua } H(0; 2; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH}(-1;1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 3: Gọi (P') với vtpt $\vec{n}'$ là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P), ta có:

$$\begin{cases} \vec{n}' \perp \vec{u} \\ \vec{n}' \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \vec{n}' = [\vec{u}, \vec{n}] = (-1; -1; 4) \text{ chọn } \vec{n}'(1; 1; -4).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P') được cho bởi:

$$(P'): \begin{cases} \text{Qua } M(2; 4; 2) \\ \text{vtpt } \vec{n}'(1; 1; -4) \end{cases} \Leftrightarrow (P'): x + y - 4z + 2 = 0.$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x + y - 4z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 4z + 2 = 0 \\ x + y + 5z - 7 = 0 \end{cases}. \quad (1)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (1) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ x + y - 4z + 2 = 0 \\ x + y + 5z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d_1) cần dựng.

c. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{u_\Delta}$ là một vtcp của đường thẳng (Δ), ta có:

$$\begin{cases} \vec{u_\Delta} \perp \vec{u} \\ \vec{u_\Delta} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \vec{u_\Delta} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (-1; -1; 4).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;1) \\ \text{vtcp } \vec{u_\Delta}(-1;-1;4) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Gọi (R) là mặt phẳng thỏa mãn:

$$(R): \begin{cases} \text{qua } A \\ (R) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (R): \begin{cases} \text{qua } A(1;1;1) \\ \text{vtpt } \vec{u}(1;3;1) \end{cases} \Leftrightarrow (R): x + 3y + z - 5 = 0.$$

Khi đó, đường thẳng (Δ) chính là giao tuyến của (P) và (R) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x + 3y + z - 5 = 0 \\ 2x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z - 6 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}. \qquad (2)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (2) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ t + 3y + z - 5 = 0 \\ 2t + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 5 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (Δ) cần dựng.

d. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng:

$$g((Q), (P)) \le g((d), (P)) \Rightarrow \text{Min}[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha.$$

Gọi $\vec{n_Q}(a; b; c)$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

$$\vec{n_Q} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{n_Q}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow a + 3b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - 3b.$$

$$\frac{\left|\vec{n_Q}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{n_Q}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \cos\alpha \Leftrightarrow \frac{|2a + 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 11\left[2a + 2b + (-a - 3b)\right]^2 = 18(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 25a^2 + 130ab + 169b^2 = 0 \Leftrightarrow (5a + 13b)^2 = 0 \Leftrightarrow 5a = -13b.$$

Chọn a = 12 ta được b = –5 và c = 2 nên $\vec{n_Q}(13; -5; 2)$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtpt } \vec{n_Q}(13; -5; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 13x - 5y + 2z - 10 = 0.$$

Cách 2: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng:

$$g((Q), (P)) \le g((d), (P)) \Rightarrow \text{Min}[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha.$$

Gọi $\vec{n_Q}(a; b; c)$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

$$\begin{cases} \vec{n_Q} \perp \vec{u} \\ \vec{n_Q} \perp \vec{u_\Delta} \end{cases} \Rightarrow \vec{n_Q} = \left[\vec{u_\Delta}, \vec{u}\right] = (-13; 5; -2).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; 1) \\ \text{vtpt } \vec{n_Q}(13; -5; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 13x - 5y + 2z - 10 = 0.$$

e. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I, vì $I \in (d)$ nên $I(t + 2; 3t + 4; t + 2)$.
Để (S) tiếp xúc với (P) điều kiện là:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2(t+2) + 2(3t+4) + (t+2) - 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow |t + 1| = 1 \Leftrightarrow t_1 = 0 \text{ hoặc } t_2 = -2.$$

Khi đó:

- Với $t_1 = 0$ thì $I_1(2; 4; 2)$, từ đó ta được:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(2; 4; 2) \\ \text{Bán kính } R=3 \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 9.$$

- Với $t_2 = -2$ thì $I_2(0; -2; 0)$, từ đó ta được:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(0; -2; 0) \\ \text{Bán kính } R=3 \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): x^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

f. *Bạn đọc tự thực hiện.*

Bài 26. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int_0^1 x^3(1 - x^3)^6 x^2 dx.$$

Đặt $t = 1 - x^3$ suy ra $dt = -3x^2dx$.

Đổi cận:

- $x = 0$ thì $t = 1$,
- $x = 1$ thì $t = 0$.

Khi đó:

$$I = -\frac{1}{3}\int_1^0 (1-t)t^6 dt = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-t)t^6 dt = \frac{1}{3}\int_0^1 (t^6 - t^7) dt = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{8}t^8\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{168}.$$

Cách 2: Viết lại I dưới dạng:

$$I = \int_0^1 x^3(1-x^3)^6 x^2 dx = \int_0^1 \left[1-(1-x^3)\right](1-x^3)^6 x^2 dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^1 \left[(1-x^3)^6 - (1-x^3)^7\right] d(1-x^3) = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{7}(1-x^3)^7 - \frac{1}{8}(1-x^3)^8\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{168}.$$

Bài 27.

a. Đặt t = sinx, suy ra dt = cosx.dx.

Đổi cận:

- x = 0 thì t = 0,
- $x = \frac{\pi}{6}$ thì $t = \frac{1}{2}$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dt}{6-5t+t^2} = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right) dt = \ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Bigg|_0^{1/2} = \ln\frac{10}{9}.$$

b. Đặt t = cosx suy ra dt = –sinx.dx.

Đổi cận:

- x = 0 thì t = 1,
- $x = \frac{\pi}{2}$ thì t = 0.

Khi đó:

$$I = -\int_1^0 \frac{t^3 dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{t^3 dt}{1+t^2} = \int_0^1 \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Bài 28.

a. Đặt $u = 2\sin^2 x + \cos^2 x$ suy ra:

$du = (4\sin x.\cos x - 2\cos x.\sin x)dx = \sin 2x.dx$.

Đổi cận:

- x = 0 thì u = 1,
- $x = \frac{\pi}{6}$ thì $t = \frac{5}{4}$.

Khi đó:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\sin 2x.dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_1^{5/4} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^{5/4} = \ln\frac{5}{4}.$$

b. Đặt $u = \tan x$, suy ra:

$$du = \frac{du}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)dx = (1 + t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = 0$,
- Với $x = \frac{\pi}{6}$ thì $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Từ đó:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos 2x} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln|u-1| - \ln|u+1|\right)\Big|_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\Big|_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

Bài 29.

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \ln x$, suy ra $du = \frac{dx}{x}$.

Đổi cận:

- Với $x = 1$ thì $u = 0$,
- Với $x = 3$ thì $u = \ln 3$.

Từ đó:

$$\int_1^3 \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx = \int_0^{\ln 3} u^2 du = \frac{u^3}{3}\Big|_0^{\ln 3} = \frac{\ln^3 3}{3}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_1^3 \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx = \int_1^3 (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{\ln^3 3}{3}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u = \ln(2 - x)$, suy ra $du = -\frac{dx}{2-x}$.

Đổi cận:

- Với $x = 0$ thì $u = \ln 2$,
- Với $x = 1$ thì $u = 0$.

Từ đó:

$$\int_0^1 \frac{\ln(2-x)}{2-x} dx = -\int_{\ln 2}^0 u du = -\frac{u^2}{2}\Big|_{\ln 2}^0 = \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int_0^1 \frac{\ln(2-x)}{2-x}dx = -\int_0^1 \ln(2-x).d[\ln(2-x)] = -\frac{1}{2}\ln^2(2-x)\Big|_0^1 = \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Bài 30.

a. Đặt $t = \ln x$ suy ra $dt = \frac{dx}{x}$.

Đổi cận:

- $x = 1 \Rightarrow t = 0$,
- $x = e \Rightarrow t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^1 (t^2+1)dt = \left(\frac{1}{3}t^3 + t\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

b. Đặt $t = \sqrt{e^x + 2}$ suy ra:

$$t^2 = e^x + 2 \Rightarrow 2tdt = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{2tdt}{t^2-2}.$$

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{3}$,
- $x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó:

$$I = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{dt}{t^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_{\sqrt{3}}^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}.$$

Bài 31. Nhận xét rằng:

$P_{M/(C)} > 0 \Leftrightarrow$ M nằm ngoài (C) $\Rightarrow$ Tồn tại hai tiếp tuyến tới C qua M.

Đường tròn (C) có tâm I(1 ; 4), bán kính R = 5.

Đường thẳng (d) đi qua M có phương trình:

(d): $A(x + 4) + B(y + 6) = 0 \Leftrightarrow$ (d): $Ax + By + 4A + 6B = 0$.

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (C)

$$\Leftrightarrow d(I, (d)) = R \Leftrightarrow \frac{|A + 4B + 4A + 6B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 5 \Leftrightarrow |A + 2B| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Leftrightarrow 3B^2 + 4AB = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ B = -\frac{4A}{3} \end{array}\right.$$

Ta lần lượt:

- Với B = 0, ta được tiếp tuyến

  (d_1): $A(x + 4) = 0 \Leftrightarrow (d_1)$: $x + 4 = 0$.

- Với $B = -\frac{4A}{3}$, ta được tiếp tuyến

$$(d_2): A(x+4) - \frac{4A}{3}(y+6) = 0 \Leftrightarrow (d_2): 3x - 4y - 12 = 0.$$

Vậy, qua M kẻ được hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới đường tròn (C).

Bài 32. Ta có :

Đường tròn (C) có tâm I(1; −1) và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Để xác định phương trình tiếp tuyến ta có hai cách giải sau:

Cách 1: Gọi k_1, k_2 theo thứ tự là hsg của tiếp tuyến (d) và đường thẳng (Δ), ta có $k_2 = -2$. Theo giả thiết:

$$\tan 45^0 = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{-k_1 - 2}{1 - 2k_1}\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 3 \\ k_1 = -1/3 \end{array}\right.$$

a. Với $k_1 = 3$, ta được:

$$(d_1): y = 3x + m \Leftrightarrow (d_1): 3x - y + m = 0. \qquad (1)$$

Đường thẳng (d_1) là tiếp tuyến của đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(I, (d_1)) = R \Leftrightarrow \frac{|3 + 1 + m|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow |m + 4| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = 6 \\ m_2 = -14 \end{array}\right.$$

- Với $m_1 = 6$, thay vào (1) được tiếp tuyến $(d_{1.1})$: $3x - y + 6 = 0$.
- Với $m_2 = -14$, thay vào (1) được tiếp tuyến $(d_{1.2})$: $3x - y - 14 = 0$.

b. Với $k_2 = -\frac{1}{3}$, ta được:

$$(d_2): y = -\frac{1}{3}x + n \Leftrightarrow (d_2): x + 3y - 3n = 0. \qquad (2)$$

Đường thẳng (d_2) là tiếp tuyến của đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(I, (d_2)) = R \Leftrightarrow \frac{|1 - 3 - 3m|}{\sqrt{1+9}} = \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow |3n + 2| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n_1 = -4 \\ n_2 = 8/3 \end{array}\right.$$

- Với $n_1 = -4$, thay vào (2) được tiếp tuyến $(d_{2.1})$: $x + 3y + 12 = 0$.
- Với $n_2 = \frac{8}{3}$, thay vào (2) được tiếp tuyến $(d_{2.2})$: $x + 3y - 8 = 0$.

Vậy, tồn tại bốn tiếp tuyến $(d_{1.1})$, $(d_{1.2})$, $(d_{2.1})$, $(d_{2.2})$ tới (C) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Giả sử tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$(d): (x-1)(x_0-1)+(y+1)(y_0+1)=10$

$\Leftrightarrow (d): (x_0-1)x+(y_0+1)y-x_0+y_0-8=0$ (1)

Vì $M(x_0; y_0) \in (C)$ nên $(x_0-1)^2+(y_0+1)^2=10$. (2)

Đường thẳng (d) tạo với (Δ) một góc bằng 45^0 khi và chỉ khi:

$$\cos 45^0 = \frac{|2(x_0-1)+1.(y_0+1)|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{(x_0-1)^2+(y_0+1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow |2x_0+y_0-1|=5 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_0=6-2x_0 & (3) \\ y_0=-4-2x_0 & (4) \end{bmatrix}.$$

a. Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) ta được:

$$\begin{bmatrix} x_0=2 \text{ và } y_0=2 \\ x_0=4 \text{ và } y_0=-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} M_1(2;2) \\ M_2(4;-2) \end{bmatrix}.$$

b. Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (4) ta được:

$$\begin{bmatrix} x_0=0 \text{ và } y_0=-4 \\ x_0=-2 \text{ và } y_0=0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} M_3(0;-4) \\ M_4(-2;0) \end{bmatrix}.$$

- Với $M_1(2; 2)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_1): $x+3y-8=0$.
- Với $M_2(4; -2)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_2): $3x-y-14=0$.
- Với $M_3(0; -4)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_3): $x+3y+12=0$.
- Với $M_4(-2; 0)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_4): $3x-y+6=0$.

Vậy tồn tại bốn tiếp tuyến (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) tới (C) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Sở dĩ trong phần lý thuyết có nhắc nhở các em học sinh cần cân nhắc khi sử dụng công thức:

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$$

bởi nếu đường thẳng (Δ) bị thay bởi:

$(\Delta): x-\alpha=0$, $(\Delta): y-\alpha=0$, $(\Delta): x+y+C=0$, $(\Delta): x-y+C=0$

thì không thể sử dụng công thức trên, do đó cách 1 không thể được sử dụng.

Như vậy lời khuyên cho các em học sinh là hãy sử dụng phương pháp trong cách 2, hoặc có thể:

Giả sử tiếp tuyến (d) có phương trình:

$(d): Ax+By+C=0$. (1)

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(I, (d)) = R \Leftrightarrow \frac{|A-B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sqrt{10}.$$ (2)

Đường thẳng (d) tạo với (Δ) một góc bằng 45^0 khi và chỉ khi:

$$\cos 45^0 = \frac{|2A+B|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{A^2+B^2}} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left[\frac{2A+B}{\sqrt{5}.\sqrt{A^2+B^2}}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 3A^2 + 8AB - 3B^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = -3B \\ A = B/3 \end{array}\right.$$

a. Với $A = -3B$, thay vào (2), ta được:

$$\frac{|-3B-B+C|}{\sqrt{(-3B)^2+B^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |C-4B| = 10|B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 14B \\ C = -6B \end{array}\right.$$

Ta lần lượt:

- Với $C = 14B$, thay vào (1), ta được tiếp tuyến
  (d_1): $-3Bx + By + 14B = 0 \Leftrightarrow (d_1)$: $3x - y - 14 = 0$.
- Với $C = -6B$, thay vào (1), ta được tiếp tuyến
  (d_2): $-3Bx + By - 6B = 0 \Leftrightarrow (d_2)$: $3x - y + 6 = 0$.

b. Với $A = \frac{B}{3}$, tương tự – *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

Bài 33. Đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

a. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (C):

$$\left\{\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - x - 3y - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} E(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}) \\ F(1-\sqrt{2};-\sqrt{2}) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Trung điểm H(1; 1).

Cách 2: Nhận xét rằng:

- (d) luôn đi qua điểm cố định O(0; 0).
- $\mathcal{P}_{O/(C)} = -2 < 0 \Rightarrow$ O ở trong (C).

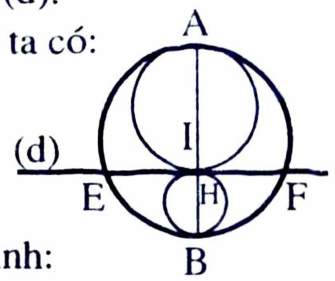
Vậy, đường thẳng (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt E, F và trung điểm H(x; y) của EF chính là hình chiếu vuông góc của tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ của (C) trên (d). Ta có:

$$\left\{\begin{array}{l} H \in (d) \\ IH \perp (d) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} H \in (d) \\ \overrightarrow{IH}\left(x-\frac{1}{2};y-\frac{3}{2}\right) \perp \overrightarrow{a_d}(1;1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} H \in (d) \\ \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{a_d} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = 1 \Rightarrow H(1;1).$$

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Từ hình vẽ ta thấy có hai đường tròn tiếp xúc với (d) tại H và tiếp xúc với (C) theo thứ tự tại A, B với A, B $\in$ (C) và AB $\perp$ (d).



Gọi (d_1) là đường thẳng qua H và vuông góc với (d), ta có:

- $(d_1) \perp (d) \Rightarrow (d_1)$: $x + y + C = 0$.
- $H \in (d_1) \Rightarrow 1 + 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$.

Từ đó ta được (d_1): $x + y - 2 = 0$.

Khi đó, toạ độ của A, B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - x - 3y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + (2-x)^2 - x - 3(2-x) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x = -1 \text{ hoặc } x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1;3) \\ B(2;0) \end{cases}.$$

Ta lần lượt:

- Đường tròn đường kính AH được cho bởi:

$$(C_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1 \text{ là trung điểm AH} \\ \text{Bkính } R_1 = \dfrac{AH}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(0;2) \\ \text{Bkính } R_1 = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (C_1): x^2 + (y-2)^2 = 2.$$

- Đường tròn đường kính BH được cho bởi:

$$(C_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2 \text{ là trung điểm BH} \\ \text{Bkính } R_2 = \dfrac{BH}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right) \\ \text{Bkính } R_2 = \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (C_2): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Vậy, tồn tại hai đường tròn (C_1) và (C_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Gọi (d_1) là đường thẳng qua H và vuông góc với (d), ta có:

(d_1): $x + y - 2 = 0$.

Giả sử đường tròn cần dựng có tâm T và bán kính R', ta lần lượt:

- $T \in (d_1) \Rightarrow T(a; 2-a)$.
- Đường tròn cần dựng chỉ có thể tiếp xúc trong với (C) nên:

$$IT = R - R' = R - HT$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - a - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{(a-1)^2 + (2-a-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}(2a-1)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2(a-1)^2} \Leftrightarrow |2a-1| = 3 - 2|a-1|. \quad (*)$$

Ta lần lượt:

- Với $a \le \frac{1}{2}$ thì phương trình (*) có dạng:

$$-2a + 1 = 3 + 2(a - 1) \Leftrightarrow 4a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow \begin{cases} T(0; 2) \\ R' = HT = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (C_1): x^2 + (y - 2)^2 = 2.$$

- Với $\frac{1}{2} < a < 1$ thì phương trình (*) có dạng:

$$2a - 1 = 3 + 2(a - 1) \Leftrightarrow -1 = 1, \text{ vô nghiệm.}$$

- Với $a \ge 1$ thì phương trình (*) có dạng:

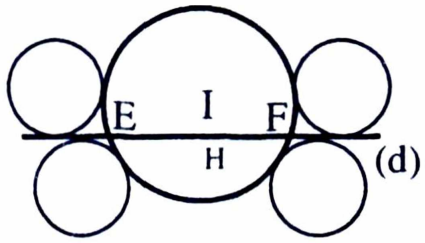
$$2a - 1 = 3 - 2(a - 1) \Leftrightarrow 4a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_2\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \\ R' = \sqrt{2}/2 \end{cases} \Leftrightarrow (C_2): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Vậy, tồn tại hai đường tròn (C_1) và (C_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Đường tròn (S) có tâm T(a; b) và bán kính bằng $R' = \sqrt{2}$ cần tìm có phương trình:

$$(S): (x - a)^2 + (x - b)^2 = 2.$$



Ta lần lượt:

- (S) tiếp xúc ngoài với (C) khi và chỉ khi:

$$IT = R + R'$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow (2a - 1)^2 + (2b - 3)^2 = 50. \qquad (**)$$

- (S) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi:

$$d(T, (d)) = R' \Leftrightarrow \frac{|a - b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |a - b| = 2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a = b + 2 \\ a = b - 2 \end{bmatrix}.$$

Ta lần lượt:

- Với $a = b + 2$ thì phương trình (**) có dạng:

$$(2b + 3)^2 + (2b - 3)^2 = 50 \Leftrightarrow 8b^2 = 32$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} b = 2 & \Rightarrow a = 4 \\ b = -2 & \Rightarrow a = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (S_1): (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 2 \\ (S_2): x^2 + (y + 2)^2 = 2 \end{bmatrix}.$$

- Với a = b – 2 thì phương trình (**) có dạng:

$$(2b-5)^2+(2b-3)^2=50 \Leftrightarrow b^2-8b-4=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=4+\sqrt{20} \Rightarrow a=2+\sqrt{20} \\ b=4-\sqrt{20} \Rightarrow a=2-\sqrt{20} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (S_3):(x-2-\sqrt{20})^2+(y-4-\sqrt{20})^2=2 \\ (S_4):(x-2+\sqrt{20})^2+(y-4+\sqrt{20})^2=2 \end{array}\right.\cdot\cdot$$

Vậy, tồn tại bốn đường tròn (S_1), (S_2), (S_3) và (S_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 34. Đường tròn (C) có tâm I(2; 0) và bán kính $R=\sqrt{2}$.

1. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (S):

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x^2+y^2-4x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2+x^2-4x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1,$$ nghiệm duy nhất.

Vậy, ta được (d) tiếp xúc với (S) tại điểm M(1; 1).

Cách 2: Đường tròn (S) có tâm I(2; 0) và bán kính $R=\sqrt{2}$, khi đó:

$$d(I,(d))=\frac{|2-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}=R$$

suy ra (d) tiếp xúc với (S).

2. Đường thẳng (Δ) song song với (d) có phương trình x – y + C = 0, với $C\neq 0$.

a. (S) tiếp xúc với (Δ) khi và chỉ khi:

$$d(I,(\Delta))=R \Leftrightarrow \frac{|2-0+C|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow |C+2|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=0 \text{ (loại)} \\ C=-4 \end{array}\right.\cdot$$

Vậy, ta được đường thẳng (Δ): x – y – 4 = 0.

b. Nhận xét rằng AB = 2R nên đường thẳng (Δ) sẽ phải đi qua tâm I của (S), do đó:

$$2-0+C=0 \Leftrightarrow C=-2 \Rightarrow (\Delta): x-y-2=0.$$

3. Vì (d) là đường phân giác góc phần tư thứ nhất nên đường thẳng (Δ) cần dựng sẽ song song với các trục toạ độ.

Ta lần lượt:

- Nếu (Δ) song song với Ox thì (Δ): y – C = 0.

  Để (Δ) tiếp xúc với (C) điều kiện là:

$$d(I,(\Delta))=R \Leftrightarrow \frac{|0-C|}{\sqrt{1^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow C=\pm\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (\Delta_1): y-\sqrt{2}=0 \\ (\Delta_2): y+\sqrt{2}=0 \end{array}\right.\cdot$$

- Nếu (Δ) song song với Oy thì (Δ): $x - C = 0$.
  Để (Δ) tiếp xúc với (C) điều kiện là:

$$d(I, (\Delta)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 - C|}{\sqrt{1^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow C = 2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} (\Delta_3): y - 2 + \sqrt{2} = 0 \\ (\Delta_4): y - 2 - \sqrt{2} = 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy, tồn tại bốn đường thẳng (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), (Δ_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

4. Giả sử đường tròn (C) cần tìm có tâm T(a; b), suy ra (C) có phương trình:

$$(C): (x - a)^2 + (y - b)^2 = \frac{1}{2}.$$

Ta lần lượt:

a. Để (C) tiếp xúc với (d) điều kiện là:

$$d(T, (d)) = R' \Leftrightarrow \frac{|a - b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |a - b| = 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a = b + 1 \\ a = b - 1 \end{bmatrix}.$$

b. Để (C) tiếp xúc với (S) ta có hai khả năng:
Khả năng 1: (C) tiếp xúc trong với (S) khi và chỉ khi:

$$IT = R - R' \Leftrightarrow \sqrt{(a - 2)^2 + b^2} = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (a - 2)^2 + b^2 = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Khi đó:

- Với $a = b + 1$ thì (1) có dạng:

$$(b + 1 - 2)^2 + b^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4b^2 - 4b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Ta được đường tròn $(C_1): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

- Với $a = b - 1$ thì (1) có dạng:

$$(b - 1 - 2)^2 + b^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4b^2 - 12b + 17 = 0, \text{ vô nghiệm.}$$

Khả năng 2: (C) tiếp xúc ngoài với (S) khi và chỉ khi:

$$IT = R + R' \Leftrightarrow \sqrt{(a - 2)^2 + b^2} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (a - 2)^2 + b^2 = \frac{9}{2}. \quad (2)$$

Khi đó:

- Với $a = b + 1$ thì (2) có dạng:

$$(b + 1 - 2)^2 + b^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4b^2 - 4b - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b = -1 \Rightarrow a = 0 \\ b = 2 \Rightarrow a = 1 \end{bmatrix}.$$

Ta được hai đường tròn :

$$(C_2): x^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{2} \text{ và } (C_3): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{2}.$$

- Với $a = b - 1$ thì (2) có dạng:

$$(b-1-2)^2 + b^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4b^2 - 12b + 9 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Ta được đường tròn $(C_4): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Vậy, tồn tại bốn đường tròn (C_1), (C_2), (C_3), (C_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 35. Đường tròn (S) có tâm I(0; 2) và bán kính $R = \sqrt{2}$.

1. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (S):

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + (x-2)^2 - 4(x-2) + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 - 4x + 6 = 0, \text{ vn} \end{cases}, \text{ vô nghiệm} \Rightarrow (d) \text{ không cắt } (S).$$

Ta có:

$$\begin{cases} H \in (d) \\ IH \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (d) \\ \overrightarrow{IH}(x; y-2) \perp \overrightarrow{a_d}(1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (d) \\ \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{a_d} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow H(2; 0).$$

Cách 2: Ta có:

$$d(I, (d)) = \frac{|0 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2} > R \Rightarrow (d) \text{ không cắt } (S).$$

Gọi (d_1) là đường thẳng qua I và vuông góc với (d), ta có:

- $(d_1) \perp (d) \Rightarrow (d_1): x + y + C = 0.$
- $I \in (d_1) \Rightarrow 0 + 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2.$

Từ đó ta được $(d_1): x + y - 2 = 0$ nên toạ độ của H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow H(2; 0).$$

2. Đường thẳng (Δ) vuông góc với (d) có phương trình $x + y + C = 0$.

a. (S) tiếp xúc với (Δ) khi và chỉ khi:

$$d(I, (\Delta)) = R \Leftrightarrow \frac{|0 + 2 + C|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |C + 2| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} C = 0 \\ C = -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (\Delta_1): x + y = 0 \\ (\Delta_2): x + y - 4 = 0 \end{bmatrix}$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (Δ) và (S):

$$\begin{cases} x + y + C = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Bằng cách rút x từ (1) thay vào (2), ta được:

$$(-y - C)^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + 2y(C - 2) + C^2 + 2 = 0. \quad (*)$$

Để (S) cắt (Δ) tại hai điểm phân biệt A, B điều kiện là phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, tức là:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (C - 2)^2 - 2(C^2 + 2) > 0 \Leftrightarrow C^2 + 4C < 0 \Leftrightarrow -4 < C < 0.$$

Khi đó (*) có hai nghiệm phân biệt y_1, y_2 (là tung độ tương ứng của A, B) thoả mãn:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2 - C \\ y_1 \cdot y_2 = \dfrac{C^2 + 2}{2} \end{cases}$$

Ta có:

$$A(x_1; y_1) = (y_1 - C; y_1),\ B(x_2; y_2) = (y_2 - C; y_2)$$

$$AB = \sqrt{6} \Leftrightarrow AB^2 = 6 \Leftrightarrow (y_2 - y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 6 \Leftrightarrow (y_2 - y_1)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (y_2 + y_1)^2 - 4y_2y_1 = 3 \Leftrightarrow (2 - C)^2 - 2(C^2 + 2) = 3$$

$$\Leftrightarrow C^2 + 4C + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = -1 \\ C = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (\Delta'_1): x + y - 1 = 0 \\ (\Delta'_2): x + y - 3 = 0 \end{array}\right.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (Δ'_1), (Δ'_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Để (S) cắt (Δ) tại hai điểm phân biệt A, B với $AB = \sqrt{6}$ điều kiện là:

$$R^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + d^2(I, (d)) \Leftrightarrow 2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{|0 + 2 + C|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{3}{2} + \frac{(2 + C)^2}{2} \Leftrightarrow (2 + C)^2 = 1 \Leftrightarrow 2 + C = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = -1 \\ C = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (\Delta'_1): x + y - 1 = 0 \\ (\Delta'_2): x + y - 3 = 0 \end{array}\right.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (Δ'_1), (Δ'_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

3. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi (d_1) là đường thẳng qua H và vuông góc với (d), ta có (d_1):

$$x + y - 2 = 0.$$

Giả sử đường tròn (C) cần dựng có tâm T và bán kính R', ta có $T \in (d_1)$ nên $T(a; 2 - a)$.

Xét hai khả năng tiếp xúc của (C) với (S) là:

Khả năng 1: (C) tiếp xúc ngoài với (S), ta được điều kiện:

$$IT = R + R' = R + HT \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (-a)^2} = \sqrt{2} + \sqrt{(a-2)^2 + (2-a)^2}$$

$$\Leftrightarrow |a| = 1 + |a-2|. \qquad (*)$$

Ta lần lượt:

- Với $a \le 0$ thì phương trình (*) có dạng:

  $-a = 1 - (a-2) \Leftrightarrow 0 = 3$, vô nghiệm.

- Với $0 < a < 2$ thì phương trình (*) có dạng:

$$a = 1 - (a-2) \Leftrightarrow 2a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_2\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \\ R' = \sqrt{2}/2 \end{cases} \Leftrightarrow (C_2): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

- Với $a \ge 2$ thì phương trình (*) có dạng:

  $a = 1 + (a-2) \Leftrightarrow 0 = -1$, vô nghiệm.

Khả năng 2: (C) tiếp xúc trong với (S), ta được điều kiện:

$$IT = R' - R = HT - R \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (-a)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (2-a)^2} - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |a| = |a-2| - 1. \qquad (*)$$

Ta lần lượt:

- Với $a \le 0$ thì phương trình (*) có dạng:

  $-a = -(a-2) - 1 \Leftrightarrow 0 = 3$, vô nghiệm.

- Với $0 < a < 2$ thì phương trình (*) có dạng:

$$a = -(a-2) - 1 \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_2\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ R' = 3\sqrt{2}/2 \end{cases} \Leftrightarrow (C_2): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}.$$

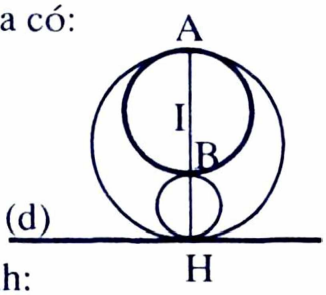
- Với $a \ge 2$ thì phương trình (*) có dạng:

  $a = (a-2) - 1 \Leftrightarrow 0 = -3$, vô nghiệm.

Vậy, tồn tại hai đường tròn (C_1) và (C_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Từ hình vẽ ta thấy có hai đường tròn tiếp xúc với (d) tại H và tiếp xúc với (S) theo thứ tự tại A, B với A, B $\in$ (S) và AB $\perp$ (d).

Gọi (d_1) là đường thẳng qua H và vuông góc với (d), ta có:



- $(d_1) \perp (d) \Rightarrow (d_1)$: $x + y + C = 0$.
- $H \in (d_1) \Rightarrow 2 + 0 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$.

Từ đó ta được (d_1): $x + y - 2 = 0$.

Khi đó, toạ độ của A, B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ (2-y)^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ y = 1 \text{ hoặc } y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1;1) \\ B(-1;3) \end{cases}.$$

Ta lần lượt:

- Đường tròn đường kính AH được cho bởi:

$$(C_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1 \text{ là trung điểm AH} \\ \text{Bkính } R_1 = \dfrac{AH}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right) \\ \text{Bkính } R_1 = \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (C_1): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

- Đường tròn đường kính BH được cho bởi:

$$(C_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2 \text{ là trung điểm BH} \\ \text{Bkính } R_2 = \dfrac{BH}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right) \\ \text{Bkính } R_2 = 3\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (C_2): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}.$$

Vậy, tồn tại hai đường tròn (C_1) và (C_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

4. Đường tròn (C) có tâm T(a; b) và bán kính bằng $R' = \sqrt{2}$ cần tìm có phương trình:

$$(C): (x - a)^2 + (x - b)^2 = 2.$$

Ta lần lượt:

- (C) khi tiếp xúc với (d) với bán kính $R' = \sqrt{2} < d(I, (d))$ chỉ có thể tiếp xúc ngoài với (S), do đó:

$$IT = R + R'$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-2)^2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + (b-2)^2 = 8. \quad (**)$$

- (C) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi:

$$d(T,(d)) = R' \Leftrightarrow \frac{|a-b-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |a-b-2| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b+4 \\ a = b \end{array}\right.$$

Ta lần lượt:

- Với $a = b + 4$ thì phương trình (**) có dạng:

  $(b+4)^2 + (b-2)^2 = 8 \Leftrightarrow b^2 + 2b + 12 = 0$, vô nghiệm.

- Với $a = b$ thì phương trình (**) có dạng:

  $b^2 + (b-2)^2 = 8 \Leftrightarrow b^2 - 2b - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1+\sqrt{3} \\ b = 1-\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (C_1): (x-1-\sqrt{3})^2 + (y-1-\sqrt{3})^2 = 2 \\ (C_1): (x-1+\sqrt{3})^2 + (y-1+\sqrt{3})^2 = 2 \end{array}\right.$$

Vậy, tồn tại hai đường tròn (C_1), (C_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 36.

a. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$0 < x^2 + x - 2 < x + 3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + x - 2 > 0 \\ x^2 < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -2 \end{array}\right. \\ |x| < \sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{5} < x < -2 \\ 1 < x < \sqrt{5} \end{array}\right.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm là $(-\sqrt{5}\,;\,-2) \cup (1;\,\sqrt{5})$.

b. Điều kiện ban đầu $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$. (*)

Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$-\log_3(x^2 - 6x + 5) + \log_3(2-x)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 6x + 5) \leq \log_3(x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow 0 < x^2 - 6x + 5 \leq x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - 6x + 5 > 0 \\ 2x \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ x < 1 \end{array}\right. \\ 2x \geq 1 \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} \leq x < 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm là $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

Bài 37.

a. Điều kiện $0 < x \neq \frac{1}{4}$. (*)

Đặt $t = \log_4 x$, bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1-t}{1+t} - \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-3t}{1+t} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq \frac{1}{3} \\ t < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_4 x \geq \frac{1}{3} \\ \log_4 x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4^{\frac{1}{3}} \\ x < \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Kết hợp (*) ta được nghiệm của bất phương trình là $\left(0;\frac{1}{4}\right) \cup [\sqrt[3]{4}\,;+\infty)$.

b. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$-2\log_5(6.6^x - 6^{2x}) \geq -2 \Leftrightarrow \log_5(6.6^x - 6^{2x}) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 6.6^x - 6^{2x} \leq 5$

Đặt $t = 6^x$, điều kiện $t > 0$.

Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} t^2 - 6t < 0 \\ t^2 - 6t + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 6 \\ \left[\begin{array}{l} t \geq 5 \\ t \leq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \leq t < 6 \\ t \leq 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \leq 6^x < 6 \\ 6^x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_6 5 \leq x < 1 \\ x \leq 0 \end{array}\right.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm là $(-\infty; 0] \cup [\log_6 5; 1)$.

Bài 38. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$\log_{\frac{1}{2}}[\log_2(3^x + 1)] > \log_{\frac{1}{2}} m \Leftrightarrow 0 < \log_2(3^x + 1) < m$$

$$\Leftrightarrow 1 < 3^x + 1 < 2^m \Leftrightarrow 0 < 3^x < 2^m - 1 \Leftrightarrow 3^x < 2^m - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^m - 1 > 0 \\ x < \log_3(2^m - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x < \log_3(2^m - 1) \end{cases}.$$

a. Với $m = 2$, ta được: $\begin{cases} 2 > 0 \\ x < \log_3(2^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow x < 1.$

Vậy, với $m = 2$ nghiệm của bất phương trình là $x < 1$.

b. Để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \log_3(2^m - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2^m - 1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2^m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Vậy, với $m \geq 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 39. Bất phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ 3x - 1 > x^2 + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < 3x - 1 < x^2 + 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 3x + 2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3x - 1 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 1/3 \\ x > 2 \vee x < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ \frac{1}{3} < x < 1 \end{array}\right.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \in (\frac{1}{3}, 2) \backslash \{1\}$.

Chú ý: Cũng có thể sử dụng cách trình bày như sau:

$$\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 3x - 1 > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \\ (x-1)(3x - 1 - x^2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x > \dfrac{1}{3} \\ (x-1)(x^2 + 3x + 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{1}{3} < x < 2 \end{cases}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \in (\frac{1}{3}, 2) \setminus \{1\}$.

Bài 40. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Bất phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{cases} x > 1 \\ 5x^2 - 8x + 3 > x^2 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < 5x^2 - 8x + 3 < x^2 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x > 1 \\ 4x^2 - 8x + 3 > 0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 5x^2 - 8x + 3 > 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 < 0 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{5} \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{5}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

Cách 2: Bất phương trình tương đương với:

$$\log_x(5x^2 - 8x + 3) > \log_x x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 5x^2 - 8x + 3 > 0 \\ x^2 > 0 \\ (x-1)[5x^2 - 8x + 3 - x^2] < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{5} \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{5}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI D NĂM 2006

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số:

$$(C): y = x^3 - 3x + 2.$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm A(3; 20) và có hệ số góc là m. Tìm m để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình:

$$\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0.$$

2. Giải phương trình:

$$\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Câu III: (2 điểm): Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(1; 2; 3) và hai đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1},\ (d_2): \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

1. Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng (d_1).
2. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A, vuông góc với (d_1) và cắt (d_2).

Câu IV: (2 điểm)

1. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x}.dx$.
2. Chứng minh rằng với mọi $a > 0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a \end{cases}.$$

PHẦN TỰ CHỌN

Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) và đường thẳng (d):

$$(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0,\ (d): x - y + 3 = 0.$$

Tìm toạ độ điểm M trên (d) sao cho đường tròn tâm M, có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C) và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

2. Một đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 em học sinh lớp A, 4 em học sinh lớp B và 3 em học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy ?

Câu V.b Theo chương trình THPT phân ban (2 điểm)

1. Giải phương trình $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$.
2. Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCMN.

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Tham khảo định hướng trong câu I.1 của đề toán khối A – 2002.
2. Đây là dạng toán về sự tương giao của hai đồ thị (bậc ba và bậc nhất), các bước thực hiện thông thường bao gồm:

   Bước 1: Thiết lập phương trình cho đường thẳng (d).

   Bước 2: Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

   $$g(x, m) = 0 \text{ (là phương trình bậc ba)} \qquad (*)$$

   Tìm cách phân tích phương trình về dạng:

   $$(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

   Bước 3: Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt khi phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt, tức là khi phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt khác x_0, suy ra:

   $$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ f(x_0) \neq 0 \end{cases}.$$

Câu II.

1. Dễ nhận thấy chỉ cần vận dụng phương pháp biến đổi về dạng tích chúng ta sẽ giải được phương trình lượng giác nay. Cụ thể:

   $\cos 3x - \cos x = -2\sin 2x.\sin x$,

   $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$.

2. Đây là phương trình chứa căn bậc hai cơ bản dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$, do đó chúng ta sẽ sử dụng phép biến đổi tương đương:

   $$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \qquad (*) \end{cases}.$$

Tuy nhiên, các em học sinh có thể dễ nhận thấy phương trình (*) có bậc bốn, nên cần biết cách nhẩm nghiệm để phân tích đa thức thành nhân tử.

Ngoài ra, cũng có thể sử dụng ẩn phụ $t = \sqrt{2x - 1}$ để giải phương trình.

Câu III. Chúng ta lần lượt:

1. Với câu 1), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d_1).

Bước 2: Suy ra toạ độ điểm A' từ điều kiện M là trung điểm của AA'.

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Xác định vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d_1).

Bước 2: Giả sử A'(x; y; z), suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm M của } AA' \text{ thuộc } (d_1) \\ AA' \perp (d_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M\left(\dfrac{x+x_A}{2};\dfrac{y+y_A}{2};\dfrac{z+z_A}{2}\right) \in (d_1) \\ \overrightarrow{AA'}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ A'.}$$

2. Với câu 2), ta có thể lựa chọn một trong ba cách:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình mặt phẳng (P_1) thoả mãn điều kiện:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_1) \perp (P_1) \end{cases}.$$

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P_2) thoả mãn điều kiện:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_2) \subset (P_2) \end{cases}.$$

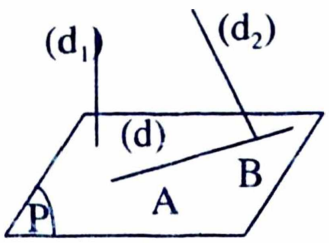
Bước 3: Kết luận:

1. Nếu $(P_1) \equiv (P_2)$ thì bài toán có vô số nghiệm.
2. Nếu $(P_1) \neq (P_2)$ thì gọi (d) là giao tuyến của (P_1) và (P_2).
   - Nếu (d) song song với (d_2) thì bài toán vô nghiệm.
   - Còn lại, kết luận (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình mặt phẳng (P) thoả mãn điều kiện:

$$(P): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_1) \perp (P) \end{cases}.$$



Bước 2: Xác định giao điểm B của (d_2) và (P).

- Nếu không tồn tại giao điểm. Kết luận vô nghiệm.
- Nếu có vô số giao điểm ($(d_2) \in (P)$). Kết luận có vô số đường thẳng trong (P) đi qua A cắt (d_2).
- Nếu có nghiệm duy nhất thực hiện bước 3.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn:

$$(d):\begin{cases}\text{qua A}\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}\end{cases}.$$

Cách 3: Được áp dụng khi (d_2) cho dưới dạng tham số, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử (d) cắt (d_2) tại B, khi đó toạ độ B thoả mãn phương trình tham số của (d_2), từ đó suy ra $\overrightarrow{AB}$.

Xác định toạ độ vectơ $\vec{a}_1$ là một vtcp của (d_1).

Bước 2: Vì $(d) \perp (d_1)$ nên: $\overrightarrow{AB} \perp \vec{a}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a}_1 = 0 \Rightarrow$ toạ độ điểm B.

Bước 3: Lập phương trình đường thẳng (d) qua A có vtcp $\overrightarrow{AB}$.

Từ đó:

- Nếu bài toán yêu cầu lập phương trình tổng quát của đường thẳng (d), sử dụng cách 1.
- Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tham số hoặc chính tắc của đường thẳng (d), sử dụng cách 2 hoặc cách 3.

Câu IV.

1. Đây là tích phân một hàm số hỗn hợp (đa thức và siêu việt) và nó thuộc dạng cơ bản $I = \int_a^b f(x)e^{ax+b}.dx$ nên phương pháp được lựa chọn là "*Phương pháp tích phân từng phần*" với cách lựa chọn:

$$\begin{cases}u = f(x)\\ dv = e^{ax+b}dx\end{cases}.$$

2. Nhận định rằng phương trình thứ hai của hệ là phương trình bậc nhất với hai ẩn x, y, điều đó dẫn tới việc có thể sử dụng phép thế để chuyển đổi tương đương hệ về một phương trình một ẩn, giả sử là:

$$f(x, a) = 0. \qquad (*)$$

Từ đó, dẫn tới việc tìm cách đi chứng minh với $a > 0$ phương trình (*) có nghiệm duy nhất.

Dễ nhận thấy (*) là phương trình không mẫu mực nên để chứng minh nó có nghiệm duy nhất thì phương pháp thường được lựa chọn là phương pháp hàm số (chứng tỏ rằng nó luôn đơn điệu).

Câu V.a.

1. Bài toán này thuộc dạng tìm điểm thuộc đường thẳng thoả mãn điều kiện K cho trước các em học sinh hãy tham khảo lại định hướng tổng quát trong câu V.a của đề toán khối A – 2006.

Các em học sinh hãy phác thảo hình ra nháp để kiểm chứng tính đúng đắn của các bước giải sau:

Bước 1: Giả sử (C) có tâm I và bán kính R.

Điểm M thuộc (d) nên có toạ độ M(x; x + 3).

Bước 2: Khi đó, điều kiện K của bài toán là: MI = 3R.

2. Với bài toán đếm kiểu này, các em học sinh cần phân tích rất kỹ yêu cầu "*Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên*" để thực hiện đi đếm phần bù, cụ thể:

Phần 1: Đếm số cách chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ từ ba lớp A, B, C. Giả sử là T_1.

Phần 2: Đếm số cách chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ từ ba lớp A, B, C mà mỗi lớp có ít nhất một em. Giả sử là T_1.

Khi đó, số cách chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên bằng: $T_1 - T_2$.

Câu V.b.

1. Dựa vào cách đánh giá hệ số cùng số mũ, chúng ta có thể thấy ngay rằng phương trình sẽ được giải bằng cách chuyển nó về dạng tích , cụ thể:

$$\left(2^{x^2+x}-2^{2x}\right)-\left(4.2^{x^2-x}-4\right)=0 \Leftrightarrow 2^{2x}\left(2^{x^2-x}-1\right)-4\left(2^{x^2-x}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{2x}-4\right)\left(2^{x^2-x}-1\right)=0.$$

2. Công việc tính thể tích khối chóp A.BCMN hoàn toàn được thực hiện khi các em lựa chọn được đỉnh, để từ đó xác định ra đường cao và đáy.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI D NĂM 2006

Câu I.

1. *Bạn đọc tự làm.*
2. Đường thẳng (d) có phương trình: (d): y = m(x − 3) + 20.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với đồ thị (C) là:

$$x^3 - 3x + 2 = m(x-3) + 20 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x-m+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 3 \\ f(x) = x^2 + 3x - m + 6 = 0 \ (*) \end{bmatrix}$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt khi:

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ f(3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 9 - 4(6-m) > 0 \\ 3^2 + 3.3 - m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 15 > 0 \\ 24 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}.$$

Vậy, với $\dfrac{15}{4} < m \neq 24$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu II.

1. Biến đổi phương trình về dạng:

$(\cos 3x - \cos x) - (1 - \cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x.\sin x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\sin 2x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(2\sin x.\cos x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x(2\cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 2\cos x + 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

2. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{2x-1} = -x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases}-x^2 + 3x - 1 \ge 0\\ 2x - 1 = (-x^2 + 3x - 1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - 3x + 1 \le 0\\ x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 8x + 2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - 3x + 1 \le 0\\ (x-1)(x^3 - 5x^2 + 6x - 2) = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - 3x + 1 \le 0\\ (x-1)^2(x^2 - 4x + 2) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - 3x + 1 \le 0\\ \left[\begin{array}{l}x - 1 = 0\\ x^2 - 4x + 2 = 0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - 3x + 1 \le 0\\ \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = 2 \pm \sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = 2 - \sqrt{2}\end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2 - \sqrt{2}$.

Cách 2: Đặt $t = \sqrt{2x-1}$ $(t \ge 0)$, suy ra $x = \dfrac{t^2 + 1}{2}$.

Khi đó, phương trình được chuyển về dạng:

$$t + \left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2 - 3.\frac{t^2+1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^4 - 4t^2 + 4t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(t^2 + 2t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t - 1 = 0\\ t^2 + 2t - 1 = 0\end{array}\right. \overset{t \ge 0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}t = 1\\ t = \sqrt{2} - 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1} = 1\\ \sqrt{2x-1} = \sqrt{2} - 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = 2 - \sqrt{2}\end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2 - \sqrt{2}$.

Câu III. Hai đường thẳng (d_1), (d_2) theo thứ tự có vtcp là

$$\overrightarrow{u_1}(2;-1;1),\ \overrightarrow{u_2}(-1;2;1).$$

1. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình đường thẳng (d_1) về dạng tham số:

$$(d_1):\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -2-t \\ z = 3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d_1), ta có:

$H(2+2t;-2-t;3+t)$, suy ra $\overrightarrow{AH}(1+2t;-4-t;t)$.

Để H là hình chiếu vuông góc của A lên (d_1) điều kiện là:

$$AH \perp (d_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow 2(1+2t)-(-4-t)+t = 0$$

$$\Leftrightarrow 6t+6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(0;-1;2).$$

Vì H là trung điểm của AA' nên A'(−1; −4; 1).

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P):\begin{cases} \text{Qua A} \\ (P) \perp (d_1) \end{cases} \Leftrightarrow (P):\begin{cases} \text{Qua A}(1;2;3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_1}(2;-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x-y+z-3 = 0.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d_1), ta có $\{H\} = (d_1) \cap (P)$ nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{1} \\ 2x-y+z-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = -2 \\ y+z = 1 \\ 2x-y+z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(0;-1;2).$$

Vì H là trung điểm của AA' nên A'(−1; −4; 1).

Cách 3: Giả sử điểm A'(x; y; z), suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm H của AA' thuộc } (d_1) \\ AA' \perp (d_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\dfrac{x+1}{2};\dfrac{y+2}{2};\dfrac{z+3}{2}\right) \in (d_1) \\ \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{u_1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\dfrac{x+1}{2}-2}{2} = \dfrac{\dfrac{y+2}{2}+2}{-1} = \dfrac{\dfrac{z+3}{2}-3}{1} \\ 2(x-1)-(y-2)+(z-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(-1;-4;1).$$

2. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt thực hiện:

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (d_1), ta có:

$$(P):\begin{cases}\text{Qua } A(1;2;3)\\ \text{vtpt } u_1(2;-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow (P): 2x-y+z-3=0.$$

- Gọi $B=(d_2)\cap(P)$, nên toạ độ B là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}\\ 2x-y+z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=3\\ y-2z=3\\ 2x-y+z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\\ z=-2\end{cases}$$

$\Rightarrow B(2;-1;-2)$.

Đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện đầu bài được xác định bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{qua } A(1;2;3)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(1;-3;-5)\end{cases}\Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=1+t\\ y=2-3t,\ t\in\mathbb{R}.\\ z=3-5t\end{cases}$$

Cách 2: Chuyển phương trình đường thẳng (d_2) về dạng tham số:

$$(d_1):\begin{cases}x=1-u\\ y=1+2u,\ u\in\mathbb{R}.\\ z=-1+u\end{cases}$$

Giả sử (d) là đường thẳng cần dựng và cắt (d_2) tại B, khi đó:

$B(1-u;\ 1+2u;\ u-1)\Rightarrow \overrightarrow{AB}(-u;\ 2u-1\ ;\ u-4)$.

Vì (d) vuông góc với (d_1) nên:

$$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_1}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\Leftrightarrow 2(-u)-(2u-1)+(u-4)=0\Leftrightarrow u=-1$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}(1;-3;-5)$.

Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{qua } A(1;2;3)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(1;-3;-5)\end{cases}\Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=1+t\\ y=2-3t,\ t\in\mathbb{R}.\\ z=3-5t\end{cases}$$

Câu IV.

1. Đặt:

$$\begin{cases}u=x-2\\ dv=e^{2x}.dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}(x-2).e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}.dx = -\frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{5-3e^2}{4}.$$

2. Điều kiện $x > -1, y > -1$.

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $y = x + a$, khi đó phương trình thứ nhất của hệ có dạng:

$$e^x - e^{x+a} = \ln(1+x) - \ln(1+x+a)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = e^x - e^{x+a} - \ln(1+x) + \ln(1+x+a) = 0. \qquad (*)$$

Xét hàm số $y = f(x)$ trên tập $D = (-1 ; +\infty)$, ta có:

$$f' = e^x - e^{x+a} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x+a}$$

$$= e^x(1-e^a) - \frac{a}{(1+x)(1+x+a)} < 0, \ \forall a > 0,$$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên D.

Mặt khác, ta lần lượt có:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = e^{-1} - e^{a-1} - (-\infty) + \ln a = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[e^x(1-e^a) + \ln\frac{1+x+a}{1+x}\right]$$

$$= e^{+\infty}(1-e^a) + \ln 1 = -\infty.$$

Từ đó, suy ra với $a > 0$ phương trình (*) luôn có nghiệm duy nhất, tức là hệ có nghiệm duy nhất.

Câu V.a.

1. Đường tròn (C) có tâm I(1; 1) và bán kính $R = 1$.

Điểm M thuộc (d) nên có toạ độ M(x; x + 3).

Khi đó, điều kiện K của bài toán là:

$$IM = 2R + R = 3R \Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (x+2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} M_1(1; 4) \\ M_2(-2; 1) \end{bmatrix}.$$

Vậy, tồn tại hai điểm M_1, M_2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

2. Ta đi thực hiện bài toán ngược:

a. Mỗi cách chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ từ ba lớp A, B, C ứng với một tổ hợp chập 4 của 12 phần tử, tức số cách chọn bằng:

$$C_{12}^4 = 495.$$

b. Số cách chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ từ ba lớp A, B, C mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

- Lớp A có 2 học sinh, các lớp B, C mỗi lớp có 1 học sinh thì số cách chọn bằng:

$$C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 120.$$

- Lớp B có 2 học sinh, các lớp A, C mỗi lớp có 1 học sinh thì số cách chọn bằng:

$$C_4^2.C_5^1.C_3^1 = 90.$$

- Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp có 1 học sinh thì số cách chọn bằng:

$$C_3^2.C_5^1.C_4^1 = 60.$$

Vậy, số cách chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ từ ba lớp A, B, C mà mỗi lớp có ít nhất một em bằng: 120 + 90 + 60 = 270.

Khi đó, số cách chọn phải tìm là 495 – 270 = 225.

Câu V.b.

1. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\left(2^{x^2+x} - 2^{2x}\right) - \left(4.2^{x^2-x} - 4\right) = 0 \Leftrightarrow 2^{2x}\left(2^{x^2-x} - 1\right) - 4\left(2^{x^2-x} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{2x} - 4\right)\left(2^{x^2-x} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2^{2x} = 4 \\ 2^{x^2-x} = 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x = 2 \\ x^2 - x = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 0 và x = 1.

2. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

Gọi K là trung điểm BC và H là hình chiếu vuông góc của A trên SK, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

do đó: $V_{A.BCNM} = \frac{1}{3} AH.S_{BCNM}$. (1)

Trong ΔSAK, ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{19}{12a^2}$

$$\Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{12}{19}}. \quad (2)$$

Ta có:

$$\frac{S_{ASMN}}{S_{ASBC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \left(\frac{SM}{SB}\right)^2 = \left(\frac{SA^2}{SB^2}\right)^2 = \left(\frac{4a^2}{4a^2+a^2}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow S_{BCNM} = \frac{9}{25}S_{ASBC} = \frac{9a^2\sqrt{19}}{100}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được: $V_{ANIB} = \frac{1}{3}.a\sqrt{\frac{12}{19}}.\frac{9a^2\sqrt{19}}{100} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ ĐỂ LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y = |x + 3| + \frac{1}{x+1}$.

Chỉ rõ các giao điểm của đồ thị với trục hoành.

Bài 2. Cho đường cong (C) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(C):\ y = x + \frac{2}{x},\quad (d):\ y = mx + 4m.$$

Biện luận theo m vị trí tương đối của (d) và (C).

Bài 3. Cho hàm số (C_m): $y = x^2(m - x) - m$.

a. Chứng minh rằng đường thẳng (d): $y = kx + k + 1$ luôn cắt đồ thị hàm số tại một điểm cố định.

b. Tìm k theo m để đồ thị (C_m) cắt đường thẳng (d) tại ba điểm phân biệt.

Bài 4. Cho hàm số:

$$(C_m):\ y = x^4 + (2m - 1)x^3 + (m^2 - 2m)x^2 - (m^2 - m + 1)x - m + 1.$$

Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Bài 5. Cho hàm số $y = \frac{3x+4}{x-1}$.

Xác định a để đường thẳng (d): $y = ax + 3$ không cắt đồ thị hàm số.

Bài 6. Cho hàm số $y = \frac{x^2+4x+3}{x+2}$.

Xác định tất cả các giá trị của k để đồ thị hàm số cắt đường thẳng (d): $y = kx + 1$ tại hai điểm phân biệt.

Bài 7. Cho hàm số: $y = f_1(x, m) = (m + 1)\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 - 3m(\frac{x^2}{x^2+1}) + 4m.$

a. Xác định tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ít nhất một điểm.

b. Xác định tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = f_1(x, m)$ cắt đồ thị hàm số $y = f_2(x, k) = \frac{k}{(x^2+1)^2}$ tại ba điểm phân biệt.

Bài 8. Cho hàm số:

$$(C_m):\ y = 2x^3 + 2(6m - 1)x^2 - 3(2m - 1)x - 3(1 + 2m).$$

Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có tổng các bình phương các hoành độ bằng 28.

Bài 9. Cho hàm số:

$$y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1).$$

Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương.

Bài 10. Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 2}.$$

Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d_m): $y = mx + 2 - m$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thuộc cùng một nhánh của đồ thị.

Bài 11. Giải phương trình $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin(10x + \frac{21\pi}{2})$.

Bài 12. Giải phương trình $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$.

Bài 13. Giải phương trình:

$$\sin^3 2x.\cos 6x + \sin 6x.\cos^3 2x = \frac{3}{8}.$$

Bài 14. Giải phương trình:

$$1 + 2\cos^2 \frac{3x}{5} = 3\cos \frac{4x}{5}.$$

Bài 15. Cho phương trình:

$$\sin^3 x.\cos 3x + \sin 3x.\cos^3 x = \sin^3 4x + m.$$

a. Giải phương trình với m = 0.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $[0; \frac{\pi}{6}]$.

Bài 16. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{2m + x - x^2}.$$

Bài 17. Giải phương trình $\sqrt{x + 4} - \sqrt{1 - x} = \sqrt{1 - 2x}$.

Bài 18. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$.

Bài 19. Cho phương trình:

$$(x - 3)(x + 1) + 4(x - 3)\sqrt{\frac{x + 1}{x - 3}} = m.$$

a. Giải phương trình với m = − 3.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài 20. Cho đường thẳng (d): $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M, y_M, z_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất.

Bài 21. Cho điểm A(2, 3, – 1) và đường thẳng (d): $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{1}$. Lập phương trình đường thẳng qua A vuông góc với (d) và cắt (d).

Bài 22. Cho hai điểm A(1, 1, 0), B(3, – 1, 4) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}.$$

Tìm điểm M trên đường thẳng (d) sao cho tổng các độ dài MA + MB nhỏ nhất.

Bài 23. Cho 2điểm A(9, 0, 9), B(12, –6, –3) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z - 9 = 0 \end{cases}.$$

Tìm điểm M trên đường thẳng (d) sao cho:

a. MA + MB nhỏ nhất.

b. | MA – MB | lớn nhất.

Bài 24. Cho điểm A(6; 2; 2) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2}.$$

a. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ sao cho tổng $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b. Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d).

c. Tìm tọa độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua đường thẳng (d).

d. Viết phương trình chính tắc đường thẳng đi qua điểm A vuông góc với (d) và cắt (d).

e. Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (d).

f. Viết phương trình mặt cầu tâm A và cắt đường thẳng (d) tại hai điểm E, F sao cho EF = 6.

Bài 25. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^{\pi/2} \cos x . \ln(1 + \cos x) dx$

b. $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x).dx}{x^2}$.

Bài 26. Tính tích phân $I = \int_0^{1/9} \left(5^{3x} + \frac{x}{\sin^2(2x+1)} + \frac{1}{\sqrt[5]{4x-1}} \right) dx$.

Bài 27. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 (x+1)e^x dx$.

b. $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$.

Bài 28. Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_1^2 x^5 \ln x dx$.

b. $I = \int_0^1 x \ln(x^2+1) dx$.

Bài 29. Tính tích phân $I = \int_1^e (x.\ln x)^2 dx$.

Bài 30. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3^x - 3^y = y - x \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases}.$$

Bài 31. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^x + 2x = 3 + y \\ 2^y + 2y = 3 + x \end{cases}.$$

Bài 32. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = (y-x)(xy+2) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}.$$

Bài 33. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = y - x \\ 2x^2 + 4x - y^2 = -3 \end{cases}.$$

Bài 34. Cho ba điểm A(0; a), B(b; 0), C(−b; 0) với a, b > 0.

a. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với AB tại B, và tiếp xúc với AC tại C.

b. Gọi M là điểm bất kỳ trên đường tròn ở phần 1). Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ M tới các đường thẳng AB, AC, BC. Chứng minh $d_1.d_2 = d_3^2$.

Bài 35. Cho hai điểm A(4; 0), B(0; 3). Lập phương trình đường tròn nội tiếp ΔOAB.

Bài 36. Cho ΔABC biết B(0; 1), C(1; 0) và trực tâm H(2; 1). Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 37. Cho điểm M(6, 2) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

a. Chứng tỏ rằng điểm M nằm ngoài (C).

b. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$.

Bài 38. Cho đường thẳng (d) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(d): x + y - 1 = 0,\ (C): x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

a. Chứng tỏ rằng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b. Lập phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc đường thẳng (Δ): $2x - y - 2 = 0$.

c. Lập phương trình đường thẳng (d_1) song song với (d) và cắt (C) tại hai điểm E, F sao cho:

- EF có độ dài lớn nhất.
- EF = AB.

Bài 39. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4,5, 6 lập các số tự nhiên gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi:

a. Có tất cả bao nhiêu số ?

b. Có bao nhiêu số chẵn, bao nhiêu số lẻ ?

c. Có bao nhiêu số bé hơn 432000 ?

Bài 40. Tìm số hoán vị của n phần tử trong đó có 2 phần tử a và b của nó không đứng cạnh nhau.

Bài 41. Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau và mỗi số chứa chữ số 5 ? Trong các số đó, có bao nhiêu số không chia hết cho 5 ?

Bài 42. Có bao nhiêu cách chia n vật khác nhau thành k nhóm mà nhóm thứ nhất có n_1 vật, nhóm thứ hai có n_2 vật,..., nhóm thứ k có n_k vật và hai nhóm bất kì không chứa vật nào chung ?

Bài 43. Một cái hộp đựng 7 quả cầu trắng và 3 quả cầu đỏ. Ta lấy ra 4 quả cầu.

a. Hỏi có thể có bao nhiêu cách ?

b. Trong đó có bao nhiêu cách lấy 2 quả cầu đỏ ?

c. Có bao nhiêu cách lấy nhiều nhất 2 quả cầu đỏ ?

d. Ít nhất là 2 quả cầu đỏ ?

Bài 44. Giải các phương trình sau:

a. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25.128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

b. $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$.

Bài 45. Giải phương trình: $\sqrt{5\log_2(-x)} = \log_2\sqrt{x^2}$.

Bài 46. Giải phương trình: $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$.

Bài 47. Cho phương trình:

$$2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + mx - 2m^2) = 0.$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 > 1$.

Bài 48. Giải phương trình:

$$2^{3x} - 6.2^x - \frac{1}{2^{3(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1.$$

Bài 1. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với Ox là :

$$|x+3| + \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+4=0 \text{ khi } -3 < x \neq -1 \\ x^2+4x+2=0 \text{ khi } x < -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-2-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(-2,0) \\ B(-2-\sqrt{2},0) \end{cases}.$$

Vậy, ta thấy $(C)\cap(Ox) = \{A, B\}$.

Bài 2. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với đồ thị hàm số là :

$$x + \frac{2}{x} = mx + 4m \Leftrightarrow (m-1)x^2 + 4mx - 2 = 0 \text{ với } x \neq 0. \quad (1)$$

Ta xét hai trường hợp :

a. Với m = 1, phương trình (1) có dạng: $4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy, đường thẳng $(d)\cap(C) = \{A(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})\}$.

b. Với $m \neq 1$, ta xét :

$\Delta' = 4m^2 + 2(m-1) = 2(m+1)(2m-1)$.

Bảng xét dấu :

m	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
Δ'		+	0	–	0	+	

Từ đó ta có :

- Nếu $-1 < m < \frac{1}{2}$, thì (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (d) không cắt (C).
- Nếu m = –1, thì (1) có nghiệm kép $x_0 = -1 \Leftrightarrow$ (d) tiếp xúc (C) tại B(–1, –3).
- Nếu $m = \frac{1}{2}$, thì (1) có nghiệm kép $x_0 = 2 \Leftrightarrow$ (d) tiếp xúc (C) tại C(2, 3).
- Nếu $m < -1$ hoặc $m > \frac{1}{2}$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Bài 3.

a. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định của họ (C_m), khi đó :

$$y_0 = x_0^2(m - x_0) - m, \forall m \Leftrightarrow (x_0^2 - 1)m - x_0^3 - y_0 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 1 = 0 \\ -x_0^3 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm 1 \\ y_0 = -x_0^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} M_1(1,-1) \\ M_2(-1,1) \end{bmatrix}.$$

Vậy, họ (C_m) có hai điểm cố định $M_1(1, -1)$ và $M_2(-1,1)$.

Nhận xét, điểm $M_2(-1,1) \in (d)$.

Vậy, đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị hàm số tại một điểm cố định.

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với đồ thị (C_m) là :

$$x^2(m - x) - m = kx + k + 1$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)[x^2 - (m + 1)x + k + m + 1] = 0. \qquad (1)$$

Đường thẳng (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 - (m + 1)x + k + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4(k + m + 1) > 0 \\ (-1)^2 - (m+1)(-1) + k + m + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2m - 3 \neq k < \frac{1}{4}(m^2 - 2m - 3).$$

Bài 4. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox là :

$$x^4 + (2m - 1)x^3 + (m^2 - 2m)x^2 - (m^2 - m + 1)x - m + 1 = 0 \quad (1)$$

$$(x - 1)(x^3 + 2mx^2 + m^2x + m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - 1 = 0 \\ x^3 + 2mx^2 + m^2x + m - 1 = 0 \quad (2) \end{bmatrix}. \qquad (I)$$

Để tiếp tục phân tích (2), ta viết lại (2) dưới dạng :

$$xm^2 + (2x^2 + 1)m + x^3 - 1 = 0.$$

Coi m là ẩn, còn x là tham số, ta được phương trình bậc hai theo m. Giải ra ta được:

$$\begin{bmatrix} m = 1 - x \\ m = -\dfrac{x^2 + x + 1}{x} \end{bmatrix}$$

Do đó (2) được chuyển về dạng : $(x + m - 1)[x^2 + (m + 1)x + 1] = 0.$

Khi đó :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - 1 = 0 \\ x + m - 1 = 0 \\ g(x) = x^2 + (m+1)x + 1 = 0 \qquad (3) \end{bmatrix}. \qquad (II)$$

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (3) có hai nghiệm phân biệt khác 1 và 1 – m và 1 – m $\neq$ 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ g(1-m) \neq 0 \\ 1-m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3>0 \\ m+3 \neq 0 \\ 3-2m \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m \neq \frac{3}{2} \\ m < -3 \end{cases}.$$

Vậy, với $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \setminus \{\frac{3}{2}\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 5. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với đồ thị hàm số là :

$$\frac{3x+4}{x-1} = ax + 3 \Leftrightarrow ax^2 - ax - 7 = 0 \text{ với } x \neq 1. \quad (1)$$

Đường thẳng (d) không cắt đồ thị hàm số $\Leftrightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

Ta xét hai trường hợp :

a. Với a = 0, khi đó (1) có dạng :

$-7 = 0$ (MT) $\Leftrightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

b. Với a $\neq$ 0, khi đó phương trình (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+28a<0 \\ \begin{cases} a^2+28a=0 \\ -7=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -28 < a < 0.$$

Vậy, với $-28 < a \leq 0$ đường thẳng (d) không cắt đồ thị hàm số.

Bài 6. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với đồ thị hàm số là :

$$\frac{x^2+4x+3}{x+2} = kx + 1 \Leftrightarrow f(x) = (k-1)x^2 + (2k-3)x - 1 = 0 \text{ với } x \neq -2. \quad (1)$$

Đồ thị hàm số cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k-1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ f(-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k-1 \neq 0 \\ (2k-3)^2 + 4(k-1) > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \neq 1.$$

Vậy, với k $\neq$ 1 đồ thị hàm số cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt.

Bài 7.

a. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là :

$$(m+1)\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 - 3m\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + 4m = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = \frac{x^2}{x^2+1}$, $0 \leq t < 1$, khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow f(t) = (m+1)t^2 - 3mt + 4m = 0. \quad (2)$$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ít nhất một điểm

$\Leftrightarrow$ (1) có ít nhất một nghiệm

$\Leftrightarrow$ (2) có ít nhất một nghiệm $t \in [0, 1)$.

Ta xét hai trường hợp :

Trường hợp 1: Với $m = -1$, phương trình (2) có nghiệm $t = \frac{4}{3} \notin [0, 1)$.

Trường hợp 2: Với $m \neq -1$, khi đó điều kiện để phương trình (2) có ít nhất một nghiệm $t \in [0, 1)$ là

$$\begin{cases} \text{Có 1 nghiệm} \in (0,1) \\ \text{Nhận } t = 0 \text{ làm nghiệm} \\ 0 < t_1 \le t_2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \le 0.$$

Vậy, với $-\frac{1}{2} < m \le 0$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ít nhất một điểm.

b. Phương trình hoành độ giao điểm của $y = f_1(x, m)$ và $y = f_2(x, k)$ là :

$$(m+1)\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 - 3m\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + 4m = \frac{k}{(x^2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (2m+1)x^4 + 5mx^2 + 4m - k = 0. \qquad (3)$$

Đặt $z = x^2$, $z \ge 0$, khi đó :

$$(3) \Leftrightarrow f(z) = (2m+1)z^2 + 5mz + 4m - k = 0. \qquad 4)$$

Hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (3) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (4) có hai nghiệm $0 = z_1 < z_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5m}{2m+1} > 0 \\ 4m - k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < m < 0 \\ k = 4m \end{cases}.$$

Vậy, với $-\frac{1}{2} < m < 0$ hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

Bài 8. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox là :

$$2x^3 + 2(6m-1)x^2 - 3(2m-1)x - 3(1+2m) = 0. \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[2x^2 + 12mx + 3(1+2m)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = 2x^2 + 12mx + 3(1+2m) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ bằng 28

$\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm phân biệt có tổng bình phương bằng 28.

- Trước hết, phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36m^2 - 12m - 6 > 0 \\ 5 + 18m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1+\sqrt{7}}{6} \\ -\dfrac{5}{18} \neq m < \dfrac{1-\sqrt{7}}{6} \end{cases}.$$

Khi đó, (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -6m \\ x_1.x_2 = \dfrac{3(1+2m)}{2} \end{cases}.$$

- Tổng các bình phương hoành độ các giao điểm bằng 28

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 1^2 = 28 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 27 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 27$$

$$\Leftrightarrow 36m^2 - 3(1 + 2m) = 27 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{12} \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Vậy, với m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 9. Trước hết, điều kiện để đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{CĐ}.y_{CT} < 0$

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $y(x_1)y(x_2) < 0$.

Ta có :

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = m \pm 1$$

Khi đó, để giải bất phương trình $y(x_1)y(x_2) < 0$ trước hết đi tính $y(x_1)$, $y(x_2)$ bằng cách :

- Thực hiện phép chia y cho y' ta được :

$$y = \frac{1}{3}y'(x - m) - 2x + m^3 - m^2 - m + 1.$$

- Khi đó :

$$y(x_1) = (m - 1)(m^2 - 3),\ y(x_2) = (m + 1)(m^2 - 2m - 1).$$

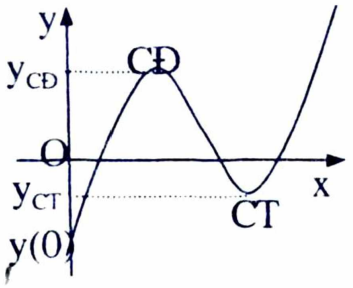
Suy ra

$$y(x_1)y(x_2) < 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m^2 - 3)(m + 1)(m^2 - 2m - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < m < -1 \\ 1-\sqrt{2} < m < 1 \\ \sqrt{3} < m < 1+\sqrt{2} \end{cases} . \qquad (I)$$

Đồ thị hàm số cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương điều kiện là :

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ y(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m+1 > 0 \\ -(m^2-1) < 0 \end{cases}$$



$\Leftrightarrow m > 1.$ (II)

Kết hợp (I) và (II) được $\sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}$.

Vậy, với $\sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}$ đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương

Bài 10. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với đồ thị hàm số là :

$$\frac{x^2+4x+1}{x+2} = mx + 2 - m$$

$\Leftrightarrow f(x) = (m-1)x^2 + (m-2)x - 2m + 3 = 0$ với $x \neq -2$. (1)

Đường thẳng (d_m) cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thuộc cùng một nhánh của đồ thị

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 về một phía của -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 < -2 \\ -2 < x_1 < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (m-1)f(-2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m-2)^2 - 4(m-1)(3-2m) > 0 \\ (m-1).3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \neq \frac{4}{3}.$$

Vậy, với $1 < m \neq \frac{4}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 11. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos 8x}{2} - \frac{1+\cos 12x}{2} = \sin\left(10x + \frac{\pi}{2} + 10\pi\right)$$

$\Leftrightarrow 2\cos 10x + \cos 12x + \cos 8x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 10x + 2\cos 10x.\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow (\cos 2x + 1)\cos 10x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = -1\\ \cos 10x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \pi + 2k\pi\\ 10x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10}\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

Bài 12. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos 6x}{2} - \frac{1+\cos 8x}{2} = \frac{1-\cos 10x}{2} - \frac{1+\cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\cos 12x - \cos 6x) + (\cos 10x - \cos 8x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 9x.\sin 3x - 2\sin 9x.\sin x = 0 \Leftrightarrow -2\sin 9x.(\sin 3x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\sin 9x.\sin 2x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 9x = 0\\ \sin 2x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 9x = 0\\ \sin 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{k\pi}{9}\\ x = \dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

Bài 13. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách biến đổi sau cho vế trái:

Cách 1: Ta có:

$$VT = \sin^2 2x.\sin 2x.\cos 6x + \sin 6x.\cos 2x.\cos^2 2x$$

$$= (1 - \cos^2 2x).\sin 2x.\cos 6x + \sin 6x.\cos 2x.(1 - \sin^2 2x)$$

$$= \sin 2x.\cos 6x + \sin 6x.\cos 2x -$$

$$- \cos^2 2x.\sin 2x.\cos 6x - \sin 6x.\cos 2x.\sin^2 2x$$

$$= \sin 8x - \cos 2x.\sin 2x.(\cos 2x.\cos 6x + \sin 6x.\sin 2x)$$

$$= \sin 8x - \frac{1}{2}\sin 4x.\cos 4x = \sin 8x - \frac{1}{4}\sin 8x = \frac{3}{4}\sin 8x.$$

Cách 2: Ta có:

$$VT = \frac{1}{4}(3\sin 2x - \sin 6x)\cos 6x + \frac{1}{4}(3\cos 2x + \cos 6x)\sin 6x$$

$$= \frac{3}{4}(\sin 2x.\cos 6x + \cos 2x.\sin 6x) = \frac{3}{4}\sin 8x.$$

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{3}{4}\sin 8x = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \sin 8x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{48} + \dfrac{k\pi}{4}\\ x = \dfrac{5\pi}{48} + \dfrac{k\pi}{4}\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 14. Ta có: $\cos^2\frac{3x}{5} = \frac{1}{2}(1 + \cos\frac{6x}{5}) = \frac{1}{2}[1 + \cos(3.\frac{2x}{5}]$.

Đặt $t = \frac{2x}{5}$, phương trình được biến đổi về dạng:

$1 + 1 + \cos 3t = 3\cos 2t \Leftrightarrow 2 + 4\cos^3 t - 3\cos t = 3(2\cos^2 t - 1)$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - 6\cos^2 t - 3\cos t + 5 = 0 \Leftrightarrow (\cos t - 1)(4\cos^2 t - 2\cos t - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 1 \\ \cos t = \frac{1-\sqrt{21}}{4} = \cos\alpha \\ \cos t = \frac{1+\sqrt{21}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2x}{5} = 2k\pi \\ \frac{2x}{5} = \pm\alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5k\pi \\ x = \pm\frac{5\alpha}{2} + 5k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 15. Ta có:

$$VT = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\cos 3x + \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)\sin 3x$$

$$= \frac{3}{4}(\sin x.\cos 3x + \cos x.\sin 3x) = \frac{3}{4}\sin 4x.$$

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{3}{4}\sin 4x = \sin^3 4x + m \Leftrightarrow 3\sin 4x - 4\sin^3 4x = m \Leftrightarrow \sin 12x = 4m. \quad (2)$$

a. Với $m = 0$, ta được: $\sin 12x = 0 \Leftrightarrow 12x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{12}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Số nghiệm thuộc $[0, \frac{\pi}{6}]$ của phương trình (1) bằng số giao điểm của đường thẳng $y = 4m$ với phần đồ thị hàm số $y = \sin 12x$ lấy trên $[0, \frac{\pi}{6}]$.

Xét hàm số $y = \sin 12x$ trên đoạn $[0, \frac{\pi}{6}]$.

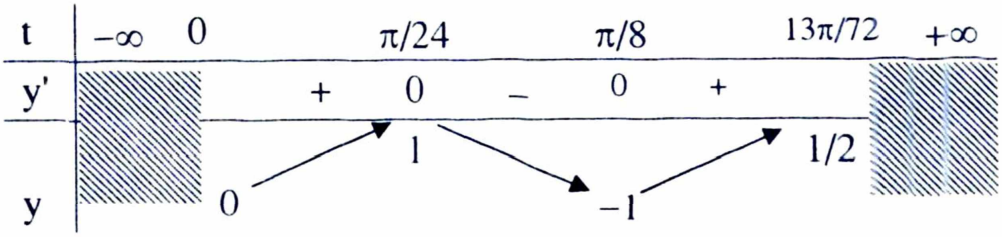
Đạo hàm

$y' = 12\cos 12x$,

$y' = 0 \Leftrightarrow 12\cos 12x = 0$

$$\Leftrightarrow 12x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{12} \overset{x\in[0,\frac{\pi}{6}]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{24} \\ x = \frac{\pi}{8} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$0 \le 4m \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{1}{8}.$$

Vậy, với $0 \le m \le \frac{1}{8}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 16. Phương trình được biến đổi tương đương về dạng:

$$-x^2 + 3x - 2 = 2m + x - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 2 \ge 0 \\ x = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ x = m + 1 \end{cases}.$$

Do đó, để phương trình có nghiệm, điều kiện là:

$$1 \le m + 1 \le 2 \Leftrightarrow 0 \le m \le 1.$$

Vậy, với $0 \le m \le 1$, phương trình có nghiệm.

Chú ý: Như vậy trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng phương pháp biến đổi tương đương dạng 1 cùng với việc lựa chọn điều kiện $-x^2 + 3x - 2 \ge 0$, điều này đã làm giảm đáng kể độ phức tạp của lời giải.

Bài 17. Phương trình viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \ge 0 \\ 1 - 2x \ge 0 \\ 1 - x + 1 - 2x + 2\sqrt{(1-x)(1-2x)} = x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \le \frac{1}{2} \\ \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{2} \\ 2x + 1 \ge 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

Chú ý: Nếu các em học sinh thấy cách thực hiện như vậy hơi gò bó thì có thể trình bày như sau:

Điều kiện:

$$\begin{cases} x+4 \ge 0 \\ 1-x \ge 0 \\ 1-2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le x \le \frac{1}{2}.$$

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ 2x^2+7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{7}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

Bài 18. Đặt $t = x^2 - 3x + 3$, ta có:

$$t = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$$

do đó điều kiện cho ẩn phụ t là $t \ge \frac{3}{4}$

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+3} = 3 \Leftrightarrow t + t + 3 + 2\sqrt{t(t+3)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{t(t+3)} = 3 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-t \ge 0 \\ t(t+3) = (3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 3 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = 2$.

Bài 19. Điều kiện:

$$\frac{x+1}{x-3} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x \le -1 \end{array}\right. \qquad (*)$$

Đặt $t = (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$, suy ra $(x-3)(x+1) = t^2$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 + 4t - m = 0 \qquad (2)$$

a. Với $m = -3$, phương trình (2) có dạng:

$$t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = -1 \end{array}\right.$$

- Với $t = -3$, ta được:

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ (x-3)(x+1)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x^2-2x-12=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x=1\pm\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{13}.$$

- Với $t = -1$, ta được:

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ (x-3)(x+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x^2-2x-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x=1\pm\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{5}.$$

Vậy, với $m = -3$ phương trình có hai nghiệm $x = 1-\sqrt{13}$ và $x = 1-\sqrt{5}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Phương trình ban đầu có nghiệm

$\Rightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4+m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -4$.

Giả sử khi đó (2) có nghiệm là t_0 thì $t_0 = (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$.

- Với $t_0 = 0 \Rightarrow x = -1$.
- Với $t_0 > 0$ suy ra:

$$\begin{cases} x-3>0 \\ (x-3)(x+1)=t_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x^2-2x-3-t_0^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x=1\pm\sqrt{4+t_0^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1+\sqrt{4+t_0^2}.$$

- Với $t_0 < 0$ suy ra:

$$\begin{cases} x-3<0 \\ (x-3)(x+1)=t_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x^2-2x-3-t_0^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x=1\pm\sqrt{4+t_0^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1-\sqrt{4+t_0^2}.$$

Vậy, với $m \geq -4$ phương trình (1) có nghiệm.

Chú ý: Nhiều em học sinh khi thực hiện bài toán trên mắc phải sai lầm từ phép biến đổi:

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = \sqrt{(x-3)(x+1)},$$

đó đương nhiên không phải là phép biến đổi tương đương.

Cần nhớ rằng: $(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = \begin{cases} \sqrt{(x-3)(x+1)} & \text{nếu } x-3>0 \\ -\sqrt{(x-3)(x+1)} & \text{nếu } x-3<0 \end{cases}$

Bài 20. Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t+1 \\ z = -t-2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Điểm $M \in (d)$, suy ra $M(t+2, 2t+1, -t-2)$.

Khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (t+2)^2 + (2t+1)^2 + (-t-2)^2 = 6t^2 + 12t + 9$$
$$= 6(t+1)^2 + 3 \geq 3.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2)_{Min} = 3$ đạt được khi: $t = -1 \Rightarrow M(1, -1, -1)$.

Bài 21. Gọi (d_1) là đường thẳng qua A vuông góc với (d) và cắt (d), vậy (d_1) qua A và H (H là hình chiếu vuông góc của A lên (d)).

- Xác định H.

Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có $\vec{a}(2, 4, 1)$.

Chuyển phương trình (d) về dạng tham số: $(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = 3+t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$

Vì $H \in (d)$, nên

$$H(2t, 4t, 3+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(2t-2, 4t-3, 4+t).$$

$$AH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-2) + 4(4t-3) + 4 + t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{4}{7} \Rightarrow H\left(\frac{8}{7}, \frac{16}{7}, \frac{25}{7}\right).$$

Phương trình (d_1), được xác định bởi:

$$\begin{cases} \text{qua } A(2,3,-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{HA}\left(\frac{6}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{32}{7}\right) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+1}{-32}.$$

Bài 22. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = -1+t \\ y = 1-t \\ z = -2+2t \end{cases}, t \in \mathbf{R},$$

khi đó, $M \in (d)$ có $M(t-1, 1-t, 2t-2)$.

Ta có:

$$MA + MB = \sqrt{(t-2)^2 + t^2 + (2t-2)^2} + \sqrt{(t-4)^2 + (2-t)^2 + (2t-6)^2}$$

$$= \sqrt{6t^2 - 12t + 8} + \sqrt{6t^2 - 36t + 56}$$

$$= \sqrt{6}\left(\sqrt{(t-1)^2 + \frac{1}{3}} + \sqrt{(t-3)^2 + \frac{1}{3}}\right). \qquad (1)$$

Xét các điểm $A_0(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, $B_0(3, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ và $I_0(t, 0, 0)$, khi đó (1) được viết lại dưới dạng:

$$MA + MB = \sqrt{6}\,(A_0I_0 + B_0I_0)$$

Từ đó MA + MB nhỏ nhất

$\Leftrightarrow A_0I_0 + B_0I_0$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A_0, B_0, I_0$ thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_0I_0} // \overrightarrow{B_0I_0} \Leftrightarrow \frac{t-1}{t-3} = \frac{-1/\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}} \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M(1, -1, 2).$$

Vậy $(MA + MB)_{Min} = 4\sqrt{2}$, đạt được tại M(1, −1, 2).

Cách 2: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R},$$

khi đó, (d) có vtcp $\vec{a}(1, -1, 2)$.

- Gọi A_1 là hình chiếu vuông góc góc của A lên (d).

  Điểm $A_1 \in$ (d), suy ra :

  $$A_1(t-1, -t+1, 2t-2) \text{ và } \overrightarrow{AA_1}(t-2, -t, 2t-2).$$

  Vì $\overrightarrow{AA_1} \perp$ (d) nên:

  $$\overrightarrow{AA_1} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow (t-2) - (-t) + 2(2t-2) = 0$$

  $$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A_1(0,0,0),\ \overrightarrow{AA_1}(-1, -1, 0) \text{ và } AA_1 = \sqrt{2}.$$

- Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc góc của B lên (d).

  Điểm $B_1 \in$(d), suy ra

  $$B_1(t-1, -t+1, 2t-2) \text{ và } \overrightarrow{BB_1}(t-4; -t+2; 2t-6).$$

  Vì $\overrightarrow{BB_1} \perp$ (d) nên:

  $$\overrightarrow{BB_1} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB_1}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow (t-4) - (-t+2) + 2(2t-6) = 0$$

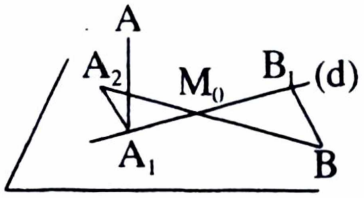
  $$\Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow B_1(2, -2, 4),\ \overrightarrow{BB_1}(-1; -1; 0) \text{ và } BB_1 = \sqrt{2}.$$

- Gọi $M_0 \in (d)$ là điểm chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\dfrac{AA_1}{BB_1} = -1$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0A_1} = -\overrightarrow{M_0B_1} \Leftrightarrow M_0(1, -1, 2).$$

Ta đi chứng minh rằng MA + MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv M_0$.

Thật vậy, gọi A_2 là điểm thuộc mặt phẳng xác định bởi (B, (d)) và A_2, B khác phía đối với (d) và thoả mãn:



$$\begin{cases} AA_1 = A_1A_2 \\ A_1A_2 \perp (d) \end{cases} \Rightarrow \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A_1A_2}{BB_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{M_0A_1}}{\overrightarrow{M_0B_1}} = -\frac{A_1A_2}{BB_1} \Rightarrow A_2, B, M_0 \text{ thẳng hàng}$$

Từ đó:

$$MA + MB = MA_2 + MB \geq A_2B = M_0A + M_0B = 4\sqrt{2}.$$

Vậy $(MA + MB)_{Min} = 4\sqrt{2}$, đạt được khi $M \equiv M_0(1, -1, 2)$.

Bài 23.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 9 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}, \text{ khi đó, } M \in (d) \text{ có } M(t, t, 9 - t).$$

Ta có:

$$\begin{aligned} MA + MB &= \sqrt{(t-9)^2 + t^2 + t^2} + \sqrt{(t-12)^2 + (t+6)^2 + (12-t)^2} \\ &= \sqrt{3t^2 - 18t + 81} + \sqrt{3t^2 - 36t + 324} \\ &= \sqrt{3}\left(\sqrt{(t-3)^2 + 18} + \sqrt{(t-6)^2 + 72}\right). \qquad (1) \end{aligned}$$

Xét các điểm $A_0(3, 3\sqrt{2}, 0)$, $B_0(6, -6\sqrt{2}, 0)$ và $I_0(t, 0, 0)$, khi đó (1) được viết lại dưới dạng:

$$MA + MB = \sqrt{3}(A_0I_0 + B_0I_0)$$

Từ đó MA + MB nhỏ nhất

$\Leftrightarrow A_0I_0 + B_0I_0$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A_0, B_0, I_0$ thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_0I_0} \;//\; \overrightarrow{B_0I_0} \Leftrightarrow \frac{t-3}{t-6} = \frac{-3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow M(4, 4, 5).$$

Vậy $(MA + MB)_{Min} = \sqrt{57} + \sqrt{228}$, đạt được tại M(4, 4, 5).

Cách 2: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d):\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 9 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}, \text{ khi đó, (d) có vtcp } \vec{a}(1, 1, -1).$$

- Gọi A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên (d).

  Điểm $A_1 \in (d)$, suy ra :

  $$A_1(t, t, 9 - t) \text{ và } \overrightarrow{AA_1}(t - 9, t, -t).$$

  Vì $\overrightarrow{AA_1} \perp (d)$ nên:

  $$\overrightarrow{AA_1} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow (t - 9) + t + t = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

  $$\Rightarrow A_1(3, 3, 6),\ \overrightarrow{AA_1}(6, 3, -3) \text{ và } AA_1 = 3\sqrt{6}.$$

- Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B lên (d).

  Điểm $B_1 \in (d)$, suy ra

  $$B_1(t, t, 9 - t) \text{ và } \overrightarrow{BB_1}(t - 12, t + 6, 12 - t).$$

  Vì $\overrightarrow{BB_1} \perp (d)$ nên:

  $$\overrightarrow{BB_1} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB_1}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow t - 12 + t + 6 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

  $$\Rightarrow B_1(6, 6, 3),\ \overrightarrow{BB_1}(-6, 12, 6) \text{ và } BB_1 = 6\sqrt{6}.$$

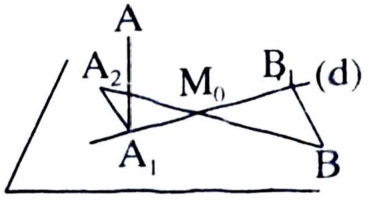
- Gọi $M_0 \in (d)$ là điểm chia vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số bằng $-\dfrac{AA_1}{BB_1} = -\dfrac{1}{2}$

  $$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{M_0A_1} = \overrightarrow{M_0B_1} \Leftrightarrow M_0(4, 4, 5).$$

Ta đi chứng minh rằng MA + MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv M_0$.

Thật vậy, gọi A_2 là điểm thuộc mặt phẳng xác định bởi (B, (d)) và A_2, B khác phía đối với (d) và thoả mãn:

$$\begin{cases} AA_1 = A_1A_2 \\ A_1A_2 \perp (d) \end{cases} \Rightarrow \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A_1A_2}{BB_1}$$



$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{M_0A_1}}{\overrightarrow{M_0B_1}} = -\frac{A_1A_2}{BB_1}$$

$\Rightarrow A_2$, B, M_0 thẳng hàng

Từ đó:

$$MA + MB = MA_2 + MB \geq A_2B = M_0A + M_0B = 4\sqrt{2}.$$

Vậy $(MA + MB)_{Min} = 4\sqrt{2}$, đạt được khi $M \equiv M_0(1, -1, 2)$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Ta có:

$$|MA - MB| = |\sqrt{(t-9)^2+t^2+t^2} - \sqrt{(t-12)^2+(t+6)^2+(12-t)^2}|$$

$$= |\sqrt{3t^2-18t+81} - \sqrt{3t^2-36t+324}|$$

$$= \sqrt{3}\,|\sqrt{(t-3)^2+18} - \sqrt{(t-6)^2+72}|. \qquad (2)$$

Xét các điểm $A_2(3, 3\sqrt{2}, 0)$, $B_2(6, 6\sqrt{2}, 0)$ và $I_2(t, 0, 0)$, khi đó (2) được viết lại dưới dạng:

$$|MA - MB| = \sqrt{3}\,|A_2I_2 + B_2I_2|$$

Từ đó $|MA - MB|$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow |A_2I_2 - B_2I|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A_2, B_2, I_2$ thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_2I_2} \,//\, \overrightarrow{B_2I_2} \Leftrightarrow \frac{t-3}{t-6} = \frac{-3\sqrt{2}}{-6\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow M(0, 0, 9).$$

Vậy $|MA - MB|_{Max} = 9$, đạt được tại $M(0, 0, 9)$.

Bài 24. Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Điểm $M \in (d)$, suy ra $M(1 + t; 1 + 2t; 3 - 2t)$.

Khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (1 + t)^2 + (1 + 2t)^2 + (3 - 2t)^2 = 9t^2 - 6t + 11$$

$$= (3t - 1)^2 + 10 \geq 10.$$

Từ đó, suy ra $\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)_{Min} = 10$ đạt được khi:

$$3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Toạ độ điểm } M\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d), ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(1; 2; -2)$.

Vì điểm $H \in (d)$ nên $H(1 + t; 1 + 2t; 3 - 2t)$, suy ra $\overrightarrow{AH}(t - 5; 2t - 1; 1 - 2t)$.

Để H là hình chiếu vuông góc của A lên (d) điều kiện là:

$$AH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow (t - 5) + 2(2t - 1) - 2(1 - 2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 3; 1).$$

Cách 2: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(1; 2; -2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (P) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } A(6; 2; 2) \\ \text{vtpt } \vec{u}(1; 2; -2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + 2y - 2z - 6 = 0.$$

Vì $\{H\} = (d) \cap (P)$ nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 2t \\ x + 2y - 2z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 2t \\ 9t - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2; 3; 1).$$

c. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

***Cách 1*: (Dựa vào kết quả câu b)**; Vì H là trung điểm của AA_1 nên $A_1(-2; 4; 0)$.

***Cách 2*: (Độc lập với câu b)**: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(1; 2; -2)$ và giả sử điểm $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm H của } AA_1 \text{ thuộc (d)} \\ AA_1 \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\dfrac{x+6}{2}; \dfrac{y+2}{2}; \dfrac{z+2}{2}\right) \in (d) \\ \overrightarrow{AA_1}.\vec{u} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+6}{2} = 1 + t \\ \dfrac{y+2}{2} = 1 + 2t \\ \dfrac{z+2}{2} = 3 - 2t \\ (x-6) + 2(y-2) - 2(z-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \\ t - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1(-2; 4; 0).$$

d. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

***Cách 1*: (Dựa vào kết quả câu b)**: Gọi (d') là đường thẳng cần dựng thì:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{Qua } H \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} \text{Qua } A(6; 2; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{HA}(4; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \frac{x-6}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

***Cách 2*: (Độc lập với câu b)**: Gọi (d') có vtcp $\vec{u'}$ là đường thẳng cần dựng.

Lấy điểm B(1; 1; 3) thuộc (d) và gọi (P) = (A, (d)) thì (P) có vtpt $\vec{n_P}$ được cho bởi:

$$\vec{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right] = (0; -9; -9) \text{ chọn } \vec{n_P}(0; 1; 1).$$

Khi đó, ta nhận thấy:

$$\begin{cases}(d')\subset(P)\\(d')\perp(d)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u'}\perp\vec{n_P}\\\vec{u'}\perp\vec{u}\end{cases}\Leftrightarrow\vec{u'}=\left[\vec{n_P},\vec{u}\right]=(-4;1;-1).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d') được cho bởi:

$$(d'):\begin{cases}\text{Qua } A(6;2;2)\\\text{vtcp } \vec{u'}(-4;1;-1)\end{cases}\Leftrightarrow(d'):\frac{x-6}{-4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-1}.$$

e. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d) được xác định bởi:

$$(S):\begin{cases}\text{Tâm } A(6;2;2)\\\text{Bán kính } R=AH=\sqrt{18}\end{cases}\Leftrightarrow(S):(x-6)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=18.$$

Cách 2: (Độc lập với câu b): Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(1;2;-2)$ và đi qua điểm B(1; 1; 3).

Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d) thì ta có:

$$R=d(A,(d))=\frac{\left|\left[\vec{AB},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\sqrt{18}.$$

Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S):\begin{cases}\text{Tâm } A(6;2;2)\\\text{Bán kính } R=\sqrt{18}\end{cases}\Leftrightarrow(S):(x-6)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=18.$$

f. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Vì H là trung điểm của EF nên mặt cầu (T) cần dựng có bán kính R được xác định bởi:

$$R=AE=\sqrt{AH^2+EH^2}=\sqrt{AH^2+\left(\frac{EF}{2}\right)^2}=\sqrt{18+9}=\sqrt{27}.$$

Phương trình mặt cầu (T) được xác định bởi:

$$(T):\begin{cases}\text{Tâm } A(6;2;2)\\\text{Bán kính } R=\sqrt{27}\end{cases}\Leftrightarrow(T):(x-6)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=27.$$

Cách 2: (Độc lập với câu b): Vì H là trung điểm của EF nên mặt cầu (T) cần dựng có bán kính R được xác định bởi:

$$R=AE=\sqrt{AM^2+EM^2}=\sqrt{d^2(A,(d))+\left(\frac{EF}{2}\right)^2}=\sqrt{18+9}=\sqrt{27}.$$

Phương trình mặt cầu (T) được xác định bởi:

$$(T):\begin{cases}\text{Tâm } A(6;2;2)\\ \text{Bán kính } R=\sqrt{27}\end{cases}\Leftrightarrow (T):(x-6)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=27.$$

Bài 25.

a. Đặt:

$$\begin{cases}u=\ln(1+\cos x)\\ dv=\cos x.dx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}dx\\ v=\sin x\end{cases}.$$

Khi đó:

$$I=\sin x.\ln(1+\cos x)\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\pi/2}(1-\cos x)dx$$

$$=(x-\sin x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1.$$

b. Đặt:

$$\begin{cases}u=\ln(1+x)\\ dv=\dfrac{dx}{x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{1+x}dx\\ v=-1/x\end{cases}.$$

Khi đó:

$$I=-\frac{1}{x}\ln(x+1)\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{x(x+1)}dx=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2+\left(\ln|x|-\ln(x+1)\right)\Big|_1^2=-\frac{3}{2}\ln 3+3\ln 2.$$

Bài 26. Biến đổi I về dạng:

$$I=\underbrace{\int_0^{1/9}5^{3x}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_0^{1/9}\frac{xdx}{\sin^2(2x+1)}}_{I_2}+\underbrace{\int_0^{1/9}\frac{dx}{\sqrt[5]{4x-1}}}_{I_3}. \qquad (1)$$

- Tính tích phân I_1 bằng cách:

$$I_1=\int_0^{1/9}5^{3x}dx=\frac{5^{3x}}{3\ln 5}\Big|_0^{1/9}=\frac{5^{1/3}-1}{3\ln 5}. \qquad (2)$$

- Tính tích phân I_2 bằng cách đặt:

$$\begin{cases}u=x\\ dv=\dfrac{dx}{\sin^2(2x+1)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=-\dfrac{1}{2}\cot(2x+1)\end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_2 = -\frac{x}{2}\cot(2x+1)\Big|_0^{1/9} + \frac{1}{2}\int_0^{1/9}\cot g(2x+1)dx$$

$$= \left[-\frac{x}{2}\cot(2x+1) + \frac{1}{4}\ln|\sin(2x+1)|\right]\Big|_0^{1/9}$$

$$= -\frac{1}{18}\cot\frac{11}{9} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin 11/9}{\sin 1}\right|. \qquad (3)$$

- Tính tích phân I_3 bằng cách:

$$I_1 = \int_0^{1/9}\frac{dx}{\sqrt[5]{4x-1}} = \int_0^{1/9}(4x-1)^{-1/5}dx$$

$$= \frac{5}{16}(4x+1)^{4/5}\Big|_0^{1/9} = \frac{5}{36}. \qquad (4)$$

Thay (2), (3), (4) vào (1), ta được:

$$I = \frac{5^{1/3}-1}{3\ln 5} - \frac{1}{18}\cot\frac{11}{9} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin 11/9}{\sin 1}\right| + \frac{5}{36}.$$

Bài 27.

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int_0^1 (x+1)e^x dx = (x+1)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 2e - 1 - e^x\Big|_0^1 = e.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = x^2.e^x\Big|_0^1 - 2\underbrace{\int_0^1 xe^x dx}_{I_1}. \qquad (1)$$

Xét tích phân I_1, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I_1 = x.e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2.$$

Cách 2: Ta đi xác định nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2e^x$, giả sử:

$$F(x) = \int x^2e^x = (ax^2 + bx + c)e^x + C. \quad (3)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (3), ta được:

$$x^2e^x = [ax^2 + (2a + b)x + b + c]e^x. \quad (4)$$

Đồng nhất hệ số, ta được: $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$.

Khi đó:

$$F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C \Rightarrow \int_0^1 x^2e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x\Big|_0^1 = e - 2.$$

Bài 28.

a. Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^5 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^6}{6} \end{cases}$.

Khi đó:

$$\int_1^2 x^5 \ln x dx = \frac{x^6}{6}.\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{6}\int_1^2 x^5 dx = \frac{32\ln 2}{3} - \frac{x^6}{36}\Big|_1^2 = \frac{32\ln 2}{3} - \frac{7}{4}.$$

b. Đặt: $\begin{cases} u = \ln(1 + x^2) \\ dv = xdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x}{1 + x^2}dx \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$.

Khi đó:

$$I = \frac{x^2}{2}\ln(1 + x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^2}dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \int_0^1 (x - \frac{x}{1 + x^2})dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)]\Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Bài 29. Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln x}{x} dx \\ v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$I = \frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\underbrace{\int_1^e x^2 \ln x dx}_{J}. \quad (1)$$

Tích phân J được tính bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x} dx \\ v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$J = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right)\Big|_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$I = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}.$$

Bài 30. Kí hiệu hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3^x - 3^y = y - x & (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 12 & (2) \end{cases}.$$

Xét phương trình (1) dưới dạng : $3^x + x = 3^y + y$. (3)

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$ đồng biến trên R.

Vậy, phương trình (3) được viết dưới dạng:

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = -2 \end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình có 2 cặp nghiệm (2, 2) và (– 2, – 2).

Bài 31. Biến đổi tương đương hệ về dạng :

$$\begin{cases} 2^x + 2x = 3 + y \\ 3 + x = 2^y + 2y \end{cases} \Rightarrow 2^x + 3x + 3 = 2^y + 3y + 3. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + 3t + 3$ là hàm đồng biến trên **R**.

Vậy, phương trình (1) được viết dưới dạng:

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} x = y \\ 2^x + 2x = 3 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2^x = 3 - x \quad (2) \end{cases} \qquad (II)$$

▪ Giải (2): Ta đoán được nghiệm $x = 1$, vì $2^1 = 3 - 1$. Vế trái là một hàm số đồng biến còn vế phải là hàm số nghịch biến, do vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình này.

Khi đó, hệ (II) trở thành:

$$\begin{cases} x = y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Vậy, hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

Bài 32. Kí hiệu hệ phương trình: $\begin{cases} 2^x - 2^y = (y - x)(xy + 2) & (1) \\ x^2 + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được:

$2^x - 2^y = (y - x)(x^2 + y^2 + xy) \Leftrightarrow 2^x - 2^y = y^3 - x^3$

$\Leftrightarrow 2^x - x^3 = 2^y - y^3 \qquad (3)$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t^3$ đồng biến trên **R**.

Vậy, phương trình (3) được viết dưới dạng: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình có 2 cặp nghiệm (1, 1) và (− 1, − 1).

Bài 33. (− 1, − 1) và (− 3, − 3).

Bài 34.

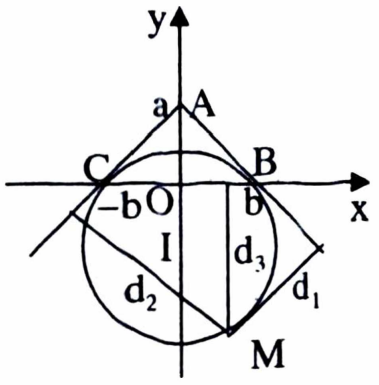
a. Giả sử phương trình đường tròn (C) có dạng:

(C): $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$

Vì AB, AC đối xứng qua Oy,

suy ra tâm $I(\alpha; \beta) \in Oy \Rightarrow \alpha = 0$.

(C) tiếp xúc với AB tại B, suy ra



$$\begin{cases} \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ R = IB \end{cases} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\dfrac{b^2}{a} \\ R = \sqrt{b^2 + \beta^2} \end{cases}.$$

Vậy, phương trình đường tròn (C): $x^2 + (y + \dfrac{b^2}{a})^2 = b^2 + \dfrac{b^4}{a^2}$.

b. Phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi (phương trình đoạn chắn):

$$(AB): \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow (AB): ax + by - ab = 0.$$

Phương trình đường thẳng (AC) được cho bởi (phương trình đoạn chắn):

$$(AC): \frac{x}{-b} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow (AC): ax - by + ab = 0.$$

Lấy điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$, suy ra:

$$x_0^2 + (y_0 + \frac{b^2}{a})^2 = b^2 + \frac{b^4}{a^2} \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + 2\frac{b^2}{a}y_0 - b^2 = 0. \quad (1)$$

Khoảng cách d_1, d_2, d_3 từ M tới các đường thẳng AB, AC, BC được cho bởi:

$$d_1 = \frac{|ax_0 + by_0 - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \; d_2 = \frac{|ax_0 - by_0 + ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \; d_3 = y_0.$$

Khi đó:

$$d_1.d_2 = \frac{|a^2x_0^2 - (by_0 - ab)^2|}{a^2 + b^2} = \frac{|a^2x_0^2 - b^2y_0^2 + 2ab^2y_0 - a^2b^2|}{a^2 + b^2}. \quad (2)$$

Nhân hai vế của (1) với $a^2 \neq 0$, ta được

$$a^2x_0^2 + a^2y_0^2 + 2ab^2y_0 - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2x_0^2 + 2ab^2y_0 - a^2b^2 = -a^2y_0^2. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được $d_1.d_2 = y_0^2 = d_3^2$ (đpcm).

Bài 35. Giả sử đường tròn (C) có tâm I(a; b) và bán kính r.

Cách 1: Tâm I thuộc đường phân giác trong của góc AÔB và phân giác trong của góc BÂO.

Phương trình phân giác trong của góc AÔB là $x - y = 0$.

Phương trình (AB) được cho bởi: $(AB): \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$.

Phương trình các đường phân giác của góc BÂO được cho bởi:

$$\frac{3x + 4y - 12}{\sqrt{9 + 16}} = \pm \frac{y}{\sqrt{1}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (\Delta_1): 3x - y - 12 = 0 \\ (\Delta_2): 3x + 9y - 12 = 0 \end{bmatrix}.$$

trong đó (Δ_2) là đường phân giác trong của góc BÂO.

Khi đó, toạ độ tâm I là nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 9y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(1; 1)$.

Bán kính r được cho bởi r = d(I, OA) = 1.

Vậy phương trình (C): $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Cách 2: Nhận xét rằng:

- Tâm I(a; b) thuộc góc phần tư thứ nhất, suy ra a, b > 0.
- (C) tiếp xúc với OA, OB, vậy a = b = r.

Ta có: $S_{\Delta OAB} = p.r$ (1)

trong đó: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = 6$ (2)

$$p = \frac{1}{2}(OA + OB + AB) = 6 \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được r = 1.

Vậy phương trình đường tròn (C: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Bài 36. Nhận xét rằng đường tròn ngoại tiếp ΔABC đối xứng với đường tròn ngoại tiếp ΔHBC qua BC. Do đó ta thực hiện như sau:

- Gọi (C_1) là đường tròn ngoại tiếp ΔHBC, có phương trình:

  (C_1): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c > 0$.

  Từ điều kiện B, C, H thuộc (C_1) ta nhận được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 - 2b + c = 0 \\ 1 - 2a + c = 0 \\ 4 + 1 - 4a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

  Vậy đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ có tâm $I_1(1; 1)$ và bán kính $R_1 = 1$.

- Phương trình (BC) được cho bởi:

$$(BC): \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1 \Leftrightarrow (BC): x + y - 1 = 0.$$

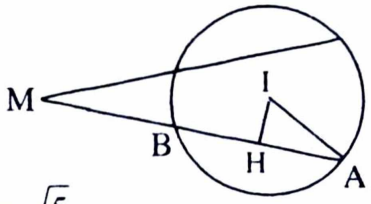
- Gọi I(x, y) là tâm đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC.

  Vì (C) và (C_1) đối xứng qua (BC) suy ra

$$\begin{cases} \text{trung điểm E của } II_1 \text{ thuộc } (BC) \\ II_1 \perp (BC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y+1}{2} - 1 = 0 \\ 1.(x - 1) - 1(y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Phương trình đường tròn (C) được cho bởi:

$$(C_1): \begin{cases} \text{tâm } I(0;0) \\ \text{bkính } R = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (C): x^2 + y^2 = 1.$$



Bài 37. Đường tròn (C) có tâm I(1; 2) và bán kính $R = \sqrt{5}$.

a. Ta có:

$$\mathcal{P}_{M/(C)} = (6-1)^2 + (2-2)^2 - 5 = 20 > 0 \Leftrightarrow M \text{ nằm ngoài đường tròn.}$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên AB, ta có:

$$IH^2 = IA^2 - AH^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4} = 5 - \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow IH = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Đường thẳng (d) đi qua M có dạng:

$$(d): A(x-6) + B(y-2) = 0 \Leftrightarrow (d): Ax + By - 6A - 2B = 0.$$

Đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện đầu bài khi và chỉ khi:

$$d(I,(d)) = IH \Leftrightarrow \frac{|A + 2B - 6A - 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 9A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm 3B.$$

- Với $A = -3B$, ta được $(d_1): x - 3y = 0$.
- Với $A = 3B$, ta được $(d_2): x + 3y - 12 = 0$.

Vậy tồn tại hai đường thẳng (d_1), (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Nhận xét rằng (d) qua M cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B không thể song song với Oy suy ra (d): $y = k(x-6) + 2$.

Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (C): $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ y = k(x-6) + 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2 + [kx - 2(3k-1)]^2 - 2x - 4[kx - 2(3k-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (k^2+1)x^2 - 2(6k^2+1)x + 4(9k^2-1) = 0 \qquad (1)$$

Để $(d) \cap (C) = \{A, B\}$ điều kiện là:

(1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} > 0$

$$\Leftrightarrow (6k^2+1)^2 - 4(k^2+1)(9k^2-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow -20k^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow |k| < \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Khi đó (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 là hoành độ của A, B và thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(6k^2+1)}{k^2+1} \\ x_1.x_2 = \dfrac{4(9k^2-1)}{k^2+1} \end{cases} \Rightarrow A(x_1, k(x_1-6)+2) \text{ và } B(x_2, k(x_2-6)+2)$$

Vì $AB = \sqrt{10}$ nên:

$$\Leftrightarrow 10 = (x_1-x_2)^2 + k^2(x_1-x_2)^2 = (k^2+1)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]$$

$$= (k^2+1)\left[\frac{4(6k^2+1)^2}{(k^2+1)^2} - \frac{8(9k^2-1)}{k^2+1}\right]$$

$$\Leftrightarrow 72k^4 - 17k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} k = \pm 1/2 \ (1) \\ k = \pm\dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- Với $k = \dfrac{1}{3}$, ta được (d_1): $x - 3y = 0$.
- Với $k = -\dfrac{1}{3}$, ta được (d_2): $x + 3y - 12 = 0$.

Vậy tồn tại hai đường thẳng (d_1), (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 38.

a. Ta lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Đường tròn (C) có tâm O(0; 0) và bán kính R = 1.

Ta có: $d(O, (d)) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < R$

Vậy (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

Cách 2: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (C):

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1-x \\ x^2+(1-x)^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1-x \\ \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0;1) \\ B(1;0) \end{cases}.$$

Vậy $(d) \cap (C) = \{A(0; 1), B(1; 0)\}$.

Cách 3: Chuyển phương trình đường tròn về dạng tham số:

$$(C): \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}, t \in [0; 2\pi). \qquad (1)$$

Thay (1) vào phương trình của (d), ta được:

$$\sin t + \cos t - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A(0;1) \\ B(1;0) \end{cases}.$$

Vậy, ta được $(d) \cap (C) = \{A(0; 1), B(1; 0)\}$.

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đường tròn (S) đi qua các giao điểm của (d) và (C), có dạng

$$(S): x^2 + y^2 - 1 + m(x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (S): x^2 + y^2 + mx + my - 1 - m = 0. \quad (2)$$

suy ra tâm $I(-\frac{m}{2}; -\frac{m}{2})$.

Từ giả thiết $I \in (\Delta)$ ta được: $2.(-\frac{m}{2}) + \frac{m}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

Thay $m = -4$ vào (2) ta được $(S): x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$.

Cách 2: Giả sử phương trình đường tròn (S) có dạng:

$(S): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với điều kiện $a^2 + b^2 - c \geq 0$.

Điểm $A(0; 1) \in (S)$ nên $1 - 2b + c = 0$. (3)

Điểm $B(1; 0) \in (S)$ nên $1 - 2a + c = 0$. (4)

Tâm $I(a; b) \in (\Delta)$ nên $2a - b - 2 = 0$ (5)

Giải hệ phương trình tạo bởi (3), (4), (5), ta được $a = b = 2, c = 3$.

Vậy, phương trình đường tròn $(S): x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$.

c. Vì (d_1) song song với (d) nên có phương trình $x + y + C = 0$.

Ta lần lượt:

- EF có độ dài lớn nhất, khi (d_1) đi qua tâm O, tức là:

$$0 - 0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow (d_1): x + y = 0.$$

- EF = AB suy ra E đối xứng với A qua O, tức E(0; −1). Khi đó:

$$E \in (d_1) \Leftrightarrow 0 - 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow (d_1): x + y + 1 = 0.$$

Bài 39.

Một số gồm 6 chữ số phân biệt hình thành từ tập $A = \{1,. 2, .., 6\}$ có dạng:

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, với $a_i \in A$, $i = \overline{1,6}$.

a. Mỗi số như vậy sẽ ứng với một hoán vị của 6 phần tử của A, do đó từ A có thể lập được:

$P_6 = 6!$ số có sáu chữ số phân biệt.

b. Để có được số chẵn thì:

- $a_6 \in \{2, 4, 6\}$ – có 3 cách chọn.
- Tiếp theo, với các vị trí a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ứng với một hoán vị của 5 phần tử còn lại, do đó có:

  $P_5 = 5!$ cách chọn.

Như vậy, ta được $3 \times 5!$ số.

Khi đó, số các số lẻ bằng $6! - 3 \times 5! = 3 \times 5!$ số.

c. Để nhận được số bé hơn 432000, ta thực hiện như sau:

- $a_1 \in \{1, 2, 3\}$ – có 3 cách chọn.

  Tiếp theo, với các vị trí a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 ứng với một hoán vị của 5 phần tử còn lại, do đó có:

  $P_5 = 5!$ cách chọn.

  Như vậy, ta được $3 \times 5!$ số.
- $a_1 = 4$ – có 1 cách chọn.

  $a_2 \in \{1, 2\}$ – có 2 cách chọn.

  Tiếp theo, với các vị trí a_3, a_4, a_5, a_6 ứng với một hoán vị của 4 phần tử còn lại, do đó có:

  $P_5 = 4!$ cách chọn.

  Như vậy, ta được $1 \times 2 \times 4!$ số.
- $a_1a_2a_3 = 431$ – có 1 cách chọn.

  Tiếp theo, với các vị trí a_4, a_5, a_6 ứng với một hoán vị của 3 phần tử còn lại, do đó có:

  $P_5 = 3!$ cách chọn.

  Như vậy, ta được $1 \times 3! = 3!$ số.

Vậy, số các số nhỏ hơn 432000 được hình thành từ A bằng:

$3 \times 5! + 1 \times 2 \times 4! + 3! = 414$ số.

Bài 40. Trước hết, ta có số hoán vị của n phần tử là:

$P_n = n!$

Trong đó kể cả số hoán vị mà 2 phần tử a và b đứng cạnh nhau.

Ta đi xem có bao nhiêu cách chọn cặp (a, b) đứng cạnh nhau và dễ thấy rằng:

- Với b đứng bên phải a, khi đó ta có thể chọn cho a tất cả (n – 1) vị trí từ vị trí đầu tiên đến vị trí thứ (n – 1).
- Với a đứng bên phải b, cũng có (n – 1) cách chọn.

Do đó có 2(n – 1) cách chọn cặp (a, b) đứng cạnh nhau. Ứng với mỗi trường hợp chọn cặp (a, b), ta có (n – 2)! cách sắp xếp (n – 2) vật còn lại vào (n – 2) vị trí còn lại.

Do đó, có tất cả:

$$2(n-1)(n-2)! = 2(n-1)!$$

hoán vị n vật mà trong đó có 2 phần tử a và b đứng cạnh nhau.

Suy ra, số hoán vị của n phần tử trong đó 2 phần tử a và b không đứng cạnh nhau là:

$$n! - 2(n-1)! = (n-2)(n-1)!.$$

Áp dụng: Số các số gồm 5 chữ số khác nhau trong đó 2 chữ số 1 và 2 không đứng cạnh nhau là:

$$5! - 2.4! = 120 - 48 = 72 \text{ số.}$$

Bài 41. Một số gồm 6 chữ số phân biệt hình thành từ tập A có dạng:

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, với $a_i \in A$, $i = \overline{1.6}$ và $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$.

Để số tìm được phải có mặt chữ số 5, ta thấy:

- $5 \in \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ – có 6 cách chọn.
- Tiếp theo, mỗi bộ số dành cho năm vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 5 của các phần tử của tập A\{ 5} – có 8 phần tử.

  $\Rightarrow$ có A_8^5 cách chọn.

Như vậy, ta được $6.A_8^5 = 40320$ số.

Trong các số trên, những số chia hết cho 5 khi $a_6 = 5$, tức là ta có A_8^5 số.

Vậy, số các số tìm thấy không chia hết cho 5 là:

$$6A_8^5 - A_8^5 = 5A_8^5 = 33600 \text{ số.}$$

Bài 42. Ta có:

- Số cách chọn n_1 trong n vật bằng $C_n^{n_1}$.
- Số vật còn lại là $n - n_1$. Có $C_{n-n_1}^{n_2}$ cách chọn n_2 vật trong $(n - n_1)$ vật.
- Số vật còn lại sau lần chọn thứ hai là $n - n_1 - n_2$. Có $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ cách chọn n_3 vật trong $(n - n_1 - n_2)$.

  ...
- Số cách chọn n_k vật trong $(n - n_1 - n_2 - ... - n_{k-1})$ vật bằng $C_{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}^{n_k}$.

Do đó, số cách chia n vật thành k nhóm n_1 vật, n_2 vật, ..., n_k vật phân li mà tổng bằng n là:

$$C_n^{n_1}.C_{n-n_1}^{n_2}.C_{n-n_1-n_2}^{n_3}...C_{n-n_1-n_2-n_3-...-n_{k-1}}^{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}.\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}.\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}$$

$$...\frac{(n-n_1-n_2-...-n_{k-1})!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3-...-n_{k-1}-n_k)!} = \frac{n!}{n_1!n_2!..n_k!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Bài 43.

a. Mỗi cách lấy ra 4 quả cầu trong số 10 quả ứng với một tổ hợp chập 4 của 10 phần tử. Do đó, số cách lấy bằng:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\,6!} = 210 \text{ cách.}$$

b. Ta có:

- Với 3 quả cầu đỏ lấy 2 quả, do đó có C_3^2 cách
- Với 7 quả cầu trắng lấy 2 quả, do đó có C_7^2 cách.

Vậy, có tất cả: $C_3^2.C_7^2 = 3.21 = 63$ cách.

c. Ta có các trường hợp:

- Chọn 2 đỏ và 2 trắng, khi đó có $C_3^2.C_7^2$ cách.
- Chọn 1 đỏ và 3 trắng, khi đó có $C_3^1.C_7^3$ cách.
- Chọn 4 trắng, khi đó có C_7^4 cách.

Vậy, có tất cả: $C_3^2.C_7^2 + C_3^1.C_7^3 + C_7^4 = 63 + 105 + 35 = 203$ cách.

d. Ta có các trường hợp:

- Chọn 2 đỏ và 2 trắng, khi đó có $C_3^2.C_7^2$ cách.
- Chọn 3 đỏ và 1 trắng, khi đó có $C_3^3.C_7^1$ cách.

Vậy, có tất cả $C_3^2.C_7^2 + C_3^3.C_7^1 = 63 + 7 = 70$ cách.

Bài 44.

a. Điều kiện $x \neq 7$ và $x \neq 3$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{-2}.2^{\frac{7(x+17)}{x-3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{\frac{7(x+17)}{x-3}-2} \Leftrightarrow \frac{5(x+5)}{x-7} = \frac{5x+125}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow 10x - 75 = 90x - 875 \Leftrightarrow 80x = 800 \Leftrightarrow x = 10.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 10$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$4^x + 2^{2x-1} = 3^{x+0,5} + 3^{x-0,5} \Leftrightarrow 4^x\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4}{3}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}.\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = \frac{3}{2}$.

Bài 45.

Điều kiện: $\begin{cases} -x > 0 \\ \log_2(-x) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$ (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{5\log_2(-x)} = \log_2|x| = \log_2(-x) \Leftrightarrow 5\log_2(-x) = \log_2^2(-x)$$

$$\Leftrightarrow [5 - \log_2(-x)]\log_2(-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \log_2(-x) = 5 \\ \log_2(-x) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -x = 2^5 \\ -x = 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -32 \\ x = -1 \end{bmatrix}$$, thỏa mãn (*).

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = -32$ hoặc $x = -1$.

Bài 46.

Điều kiện: $\begin{cases} (x+2)^2 > 0 \\ 4 - x > 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6 < x < -2 \\ -2 < x < 4 \end{bmatrix}.$ (*)

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$3\log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 3 = 3\log_{\frac{1}{4}}(4-x) + 3\log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} 4|x+2| = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)(x+6) \Leftrightarrow 4|x+2| = (4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2) = (4-x)(x+6) \\ 4(x+2) = -(4-x)(x+6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -8 \\ x = 1+\sqrt{33} \\ x = 1-\sqrt{33} \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 2 \\ x = 1-\sqrt{33} \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 1 - \sqrt{33}$.

☞ ***Chú ý:*** Nếu biến đổi:

$$\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 = 2\log_{\frac{1}{4}}(x+2) \text{ sẽ làm mất nghiệm } x = 1 - \sqrt{33}.$$

Hãy nhớ rằng:

$$\log_a c^b = b.\log_a|c|,\ \sqrt{a^2} = |a| \text{ và } \sqrt{a.b} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$$

Bài 47. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\log_2(2x^2 - x + 2m - 4m^2) - \log_2(x^2 + mx - 2m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2 - x + 2m - 4m^2) = \log_2(x^2 + mx - 2m^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 2m - 4m^2 = x^2 + mx - 2m^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ x^2 - (m+1)x + 2m - 2m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 2m \\ x_2 = 1-m \end{array}\right. \end{cases}.$$

a. Với $m = 1$, ta được: $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b. Để bất phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 > 1$ điều kiện là:

$$\begin{cases} (2m)^2 + m(2m) - 2m^2 > 0 \\ (1-m)^2 + m(1-m) - 2m^2 > 0 \\ (2m)^2 + (1-m)^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0 \\ \dfrac{2}{5} < m < \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Bài 48. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}}) - 6(2^x - \frac{2}{2^x}) = 1. \qquad (1)$$

Đặt $t = 2^x - \frac{2}{2^x}$, suy ra:

$$2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}} = (2^x - \frac{2}{2^x})^3 + 3.2^x.\frac{2}{2^x}(2^x - \frac{2}{2^x}) = t^3 + 6t.$$

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$t^3 + 6t - 6t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2^x - \frac{2}{2^x} = 1. \qquad (2)$$

Đặt $u = 2^x$, $u > 0$, khi đó phương trình (2) có dạng:

$$u - \frac{2}{u} = 1 \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \text{ (l)} \\ u = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2005

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số:

$$(C_m): y = mx + \frac{1}{x}, \text{ m là tham số.}$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 1/4.
2. Tìm m để hàm số (C_m) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến tiệm cận xiên của (C_m) bằng $1/\sqrt{2}$.

Câu II: (2 điểm):

1. Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$.
2. Giải phương trình: $\cos^2 3x.\cos 2x - \cos^2 x = 0$.

Câu III: (3 điểm):

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hai đường thẳng (d_1): x − y = 0 và (d_2): 2x + y − 1 = 0. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết rằng A thuộc (d_1), C thuộc (d_2) và B, D thuộc trục hoành.
2. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(d): \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}; \quad (P): 2x + y - 2z + 9 = 0.$$

   a. Tìm toạ độ điểm I thuộc (d) sao cho khoảng cách từ I tới (P) bằng 2.
   b. Tìm toạ độ giao điểm A của (d) và (P). Viết phương trình tham số của đường thẳng (Δ) nằm trong mặt phẳng (P), biết (Δ) đi qua A và vuông góc với (d).

Câu IV: (2 điểm):

1. Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin 2x + \sin x)dx}{\sqrt{1+3\cos x}}$.
2. Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - \ldots + (2n+1).2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$

Câu V: (1 điểm): Cho ba số dương x, y, z, thoả mãn:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4.$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \le 1$.

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Tham khảo định hướng trong câu I.1 của đề toán khối A – 2009.
2. Đây là bài toán " *Tìm điều kiện của tham số để hàm số có cực trị thoả mãn điều kiện K* ", do đó các bước thực hiện bao gồm:

   Bước 1: Chỉ ra miền xác định D của hàm số.

   Bước 2: Tính đạo hàm y', rồi thiết lập phương trình y' = 0.

   Bước 3: Trước hết, hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình y'= 0 có hai nghiệm phân biệt thuộc D.

   Bước 4: Lập bảng biến thiên để xác định điểm cực tiểu.

   Bước 5: Chỉ ra tiệm cận xiên của (C_m).

   Bước 6: Kiểm tra tính chất K.

☞ ***Nhận xét***: Giả thiết K ở đây là "*Khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến tiệm cận xiên của (C_m) bằng* $1/\sqrt{2}$ " chỉ nhằm tăng độ khó cho bài toán, còn về bản chất thì sử dụng điểm cực đại hay cực tiểu là như nhau do tính đối xứng. Do đó, người ta có thể phát biểu lại dưới các dạng sau:

" Tìm m để hàm số (C) có cực trị và:

a. Khoảng cách từ điểm cực đại của (C_m) đến tiệm cận xiên của (C_m) bằng $1/\sqrt{2}$.

b. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $2\sqrt{5}$.

c. Khoảng cách từ điểm cực đại (điểm cực tiểu) của (C_m) đến tâm đối xứng của (C_m) bằng $\sqrt{5}$.

Câu II.

1. Đây là bất phương trình vô tỉ và có thể nhận thấy ngay rằng sau phép chuyển vế được bất phương trình dạng $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} + \sqrt{h(x)}$, do đó các bước thực hiện bao gồm:

   Bước 1: Thiết lập điều kiện có nghĩa cho bất phương trình. (*)

   Bước 2: Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$f(x) > g(x) + h(x) + 2\sqrt{g(x).h(x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{g(x).h(x)} < p(x) \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) > 0 \\ g(x).h(x) < p^2(x) \end{cases} \Rightarrow \text{nghiệm.}$$

   Bước 3: Kết hợp với (*), nhận được nghiệm của bất phương trình.

2. Đây là phương trình lượng giác giải được bằng cách chuyển về dạng tích, do đó cần nhận ra được nhân tử chung:

Bước 1: Sử dụng công thức $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Bước 2: Nhóm nhân tử chung $\cos^2 x$, nhận được một phương trình tích.

Bước 3: Kết luận về nghiệm cho phương trình.

Câu III.

1. Đây là dạng toán tìm điểm liên quan tới đường thẳng và có quan hệ mật thiết với tính chất của hình vuông, do đó các bước thực hiện bao gồm:

Bước 1: Phác thảo hình vẽ.

Bước 2: Sử dụng giả thiết *thuộc* suy ra toạ độ các điểm A, B, C, D.

Bước 3: Sử dụng tính chất "*ABCD là hình vuông khi và chỉ khi AC ⊥ BD và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường*", do đó:

$$\begin{cases} AC // Oy \text{ và I là trung điểm của AC} \\ IA = IB \end{cases}, \text{ với I là tâm ABCD}$$

$\Rightarrow$ toạ độ A, B, C, D.

2. Ta lần lượt có nhận xét:

a. Đây là bài toán về điểm liên quan đến đường thẳng, do đó:

Bước 1: Ta chuyển (d) về dạng tham số từ đó nhận được toạ độ điểm I theo tham số t.

Bước 2: Sử dụng điều kiện $d(I, P) = 2 \Rightarrow t \Rightarrow$ toạ độ I.

b. Ta thực hiện:

Bước 1: Xác định toạ độ của điểm A: Thay phương trình tham số của (d) và (P) $\Rightarrow t \Rightarrow$ toạ độ A.

Bước 2: Có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Dựa vào điều kiện:

$$\begin{cases} (\Delta) \subset (P) \\ (\Delta) \perp (d) \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ vtcp } \vec{b} \text{ của } (\Delta).$$

Lập phương trình tham số của đường thẳng (Δ) đi qua A có vtcp $\vec{b}$.

Cách 2: Lập phương trình mặt phẳng (Q) qua A và vuông góc với (d). Từ đó suy ra phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ) là giao tuyến của (P) và (Q).

Chuyển phương trình đường thẳng (Δ) về dạng tham số.

Câu IV.

1. Đây là tích phân hàm số lượng giác có chứa căn, phương pháp được sử dụng phổ biến là đặt ẩn phụ: như đã biết chúng ta có thể sử dụng ẩn phụ dạng $t = \cos x$ hoặc $t = \sqrt{1+3\cos x}$ để chuyển tích phân ban đầu về tích phân hàm số vô tỉ hoặc hữu tỉ.
2. Đây là dạng toán cơ bản trong khai triển Niutơn, các bước thực hiện bao gồm:

   Bước 1: Lựa chọn đa thức để khai triển dựa vào chỉ số.

   Bước 2: Nhận xét các hệ số của các $k.a^{k-1}C_{2n+1}^{k}$, dẫn tới phép toán đạo hàm.

   Bước 3: Thay $a = 2$.

Câu V. Bất đẳng thức có tính đối xứng, do đó:

- Chắc chắn dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$.
- Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{\underbrace{(x+y)}_{a}+\underbrace{(x+z)}_{b}} \text{ có liên hệ gì với } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Chúng ta có bất đẳng thức quen thuộc $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2005

Câu I.

1. *Bạn đọc tự làm.*
2. Hàm số xác định trên $D = \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

   Đạo hàm:

$$y' = m - \frac{1}{x^2} = \frac{mx^2-1}{x^2},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow f(x) = mx^2 - 1 = 0. \qquad (1)$$

Trước hết, hàm số có cực trị khi và chỉ khi

$$(1) \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Khi đó, (1) có hai nghiệm $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{m}}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{m}$		$1/\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y		↗	CĐ	↘	CT	↗	

Vậy, hàm số đạt CT tại điểm $A(\frac{1}{\sqrt{m}}, 2\sqrt{m})$.

Đồ thị (C_m) có tiệm cận xiên là (d): $y = mx \Leftrightarrow$ (d): $mx - y = 0$.

Để khoảng cách từ điểm cực tiểu A của (C_m) đến tiệm cận xiên của (C_m) bằng $1/\sqrt{2}$ điều kiện là:

$$\frac{|\sqrt{m} - 2\sqrt{m}|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, $m = 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu II.

1. Điều kiện:

$$\begin{cases} 5x - 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ 2x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2. \qquad (*)$$

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{5x-1} > \sqrt{2x-4} + \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 5x - 1 > 2x - 4 + x - 1 + 2\sqrt{(2x-4)(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-4)(x-1)} < x + 2 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} (2x-4)(x-1) < (x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 10.$$

Kết hợp với (*), ta được nghiệm của bất phương trình là $2 \leq x < 10$.

2. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(4\cos^3 x - 3\cos x)^2.\cos 2x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow [(4\cos^2 x - 3)^2.\cos 2x - 1]\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow [(2\cos 2x + 2 - 3)^2.\cos 2x - 1]\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^3 2x - 4\cos^2 2x + \cos 2x - 1)\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^2 2x + 1)(\cos 2x - 1)\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x.\cos^2 x = 0$$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

☞ ***Chú ý***: Phương trình trên còn có thể được giải bằng cách:

$\cos 3x.\cos 3x.\cos 2x - \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos 3x(\cos 5x + \cos x) - \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos 3x.\cos 5x + \dfrac{1}{2}\cos 3x.\cos x - \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}(\cos 8x + \cos 2x) + \dfrac{1}{4}(\cos 4x + \cos 2x) - \dfrac{1}{2}(\cos 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0.$

Tới đây, chúng ta có thể lựa chọn theo 2 hướng:

Hướng 1: Ta biến đổi:

$$2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 1\\ \cos 4x = -3/2 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

Hướng 2: Ta biến đổi:

$$\cos 8x + \cos 4x = 2 \overset{|\cos\alpha| \le 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\cos 8x = 1\\ \cos 4x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

Câu III.

1. Từ giả thiết, ta có ngay:

$A(a, a), B(b, 0), C(c, 1 - 2c), D(d, 0).$

Gọi I là tâm hình vuông ABCD, khi đó ta thiết lập được điều kiện:

$$\begin{cases}A, C \text{ đối xứng qua } BD\\ B, D \text{ đối xứng qua } AC\\ IB = IA\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A, C \text{ đối xứng qua } BD\\ IB = ID = IA\end{cases}.$$

Trước hết, ta cần có A, C đối xứng qua BD (qua Ox), suy ra:

$$\begin{cases} a = c \\ a + (1 - 2c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = c = 1 \Rightarrow A(1, 1), C(1, -1) \text{ và } I(1, 0).$$

Tiếp theo, ta có:

$IB = ID = IA = 1 \Rightarrow B(2, 0)$ và $D(0, 0)$ hoặc $B(0, 0)$ và $D(2, 0)$.

Vậy, các đỉnh của hình vuông ABCD có toạ độ:

$A(1, 1), B(2, 0), C(1, -1), D(0, 0)$

hoặc $A(1, 1), B(0, 0), C(1, -1), D(2, 0)$.

2. Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

a. Với giả thiết $I \in (d)$ suy ra $I(1 - t, 2t - 3, 3 + t)$.

Với điều kiện $d(I, P) = 2$, ta được:

$$\frac{|2(1-t) + (2t-3) - 2(3+t) + 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 4 \\ t = -2 \end{bmatrix}.$$

- Với $t = 4$, ta được $I_1(-3, 5, 7)$.
- Với $t = -2$, ta được $I_2(3, -7, 1)$.

Vậy, tồn tại hai điểm I_1, I_2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

$2(1 - t) + (2t - 3) - 2(3 + t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(0, -1, 4)$.

Gọi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ theo thứ tự là vtcp của (d), vtcp của (Δ), vtpt của (P), ta có

$\vec{a}(-1, 2, 1)$ và $\vec{n}(2, 1, -2)$.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} (\Delta) \subset (P) \\ (\Delta) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{b} \perp \vec{n} \\ \vec{b} \perp \vec{a} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{b} = [\vec{n}, \vec{a}] = (5, 0, 5) \text{ chọn } \vec{b}(1, 0, 1).$$

Khi đó:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } A(0, -1, 4) \\ \text{vtct } \vec{b}(1, 0, 1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Câu IV.

1. Đặt $t = \sqrt{1+3\cos x}$, suy ra:

$$t^2 = 1 + 3\cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{t^2-1}{3} \Rightarrow -\sin x dx = \frac{2tdt}{3}.$$

Đổi cận:

- Với $x = 0 \Rightarrow t = 2$.
- Với $x = \pi/2 \Rightarrow t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{(2\cos x + 1).\sin x.dx}{\sqrt{1+3\cos x}} = -\frac{2}{3}\int_2^1 \frac{\frac{2(t^2-1)}{3}+1}{t} tdt = \frac{2}{9}\int_1^2 (2t^2+1)dt$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}t^3 + t\right)\Big|_1^2 = \frac{34}{27}.$$

2. Ta xét:

$$(1-x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k C_{2n+1}^k x^k. \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được:

$$-(2n+1)(1-x)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k k.C_{2n+1}^k x^{k-1}$$

$$\overset{x=2}{\Leftrightarrow} -(2n+1) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k.C_{2n+1}^k 2^{k-1} \Leftrightarrow 2n+1 = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k.C_{2n+1}^k 2^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow 2n + 1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002.$$

Vậy, n = 1002 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu V. Trước tiên, ta đi chứng minh:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}. \qquad (*)$$

Thật vậy, bất đẳng thức (*) tương đương với:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Dấu " = " xảy ra khi a = b.

Từ đó:

$$4 = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x+y}+\frac{4}{y+z}+\frac{4}{z+x}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)+\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)+\left(\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)$$

$$\geq \frac{4}{x+2y+z}+\frac{4}{x+y+2z}+\frac{4}{2x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}+\frac{1}{2x+y+z} \leq 1, \text{ đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI B NĂM 2005

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số:

$$(C_m): y = \frac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}, \text{ với m là tham số.}$$

1. (1 điểm): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 1.
2. (1 điểm): Chứng minh rằng với m bất kỳ, đồ thị (C_m) luôn luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

Câu II: (2 điểm):

1. (1 điểm): Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{2-y}=1\\ 3\log_9(9x^2)-\log_3 y^3=3\end{cases}$.
2. (1 điểm): Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

Câu III: (3 điểm):

1. (1 điểm): Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hai điểm A(2, 0) và B(6, 4). Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.
2. (2 điểm): Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với A(0, −3, 0), B(4, 0, 0), C(0, 3, 0), B_1(4, 0, 4).
   a. (0.5 điểm): Tìm toạ độ các đỉnh A_1, C_1.

b. (0.5 điểm): Viết phương trình mặt cầu có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1).

c. (0.5 điểm): Gọi M là trung điểm của A_1B_1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC_1.

d. (0.5 điểm): Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng (A_1C_1) tại N. Tính độ dài đoạn MN.

Câu IV: (2 điểm):

1. (1 điểm): Tính tích phân:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x.\cos x.dx}{1+\cos x}.$$

2. (1 điểm): Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

Câu V: (1 điểm): Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Tham khảo định hướng trong câu I.1 của đề toán khối A – 2008.
2. Với yêu cầu của bài toán ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Ta có:

- Miền xác định D.
- Đạo hàm y' và thiết lập phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. (1)

Bước 2: Khẳng định rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt thuộc D.

Bước 3: Toạ độ các điểm cực đại và cực tiểu là:

$$A(x_1, \frac{u'(x_1)}{v'(x_1)}); B(x_2, \frac{u'(x_2)}{v'(x_2)}).$$

Bước 4: Kiểm tra $AB = \sqrt{20}$.

Câu II.

1. Hệ phương trình có chứa căn thức và logarit, do đó chúng ta cần thực hiện hai công việc chính đó là:
   a. Đặt điều kiện có nghĩa cho hệ phương trình.
   b. Lựa chọn một trong hai phương trình để biến đổi được về dạng $y = f(x)$ hoặc $x = f(y)$, cụ thể ở đây chúng ta biến đổi phương trình thứ hai của hệ:
   $$3(1 + \log_3 x) - 3\log_3 y = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 y \Leftrightarrow x = y.$$
2. Nhận xét rằng:
   $$1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2,$$
   $$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x).$$

Do đó, có thể chuyển được phương trình về dạng tích với nhân tử chung là $\cos x + \sin x$.

Câu III.

1. Nhận xét rằng, đường tròn (C) với tâm I(a, b) bán kính R sẽ thoả mãn:
   $$\begin{cases} R = IA \perp Ox \\ IB = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ \sqrt{(a-6)^2 + (b-4)^2} = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{tâm I} \Rightarrow R = IA = |b|.$$
   Từ đó, nhận được phương trình đường tròn (C).
2. Ta lần lượt nhận thấy:
   a. Từ điều kiện $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$, suy ra được toạ độ của A_1 và C_1.
   b. Mặt cầu (S) tâm A tiếp xúc với (BCC_1B_1) khi và chỉ khi:
   $$d(A, (BCC_1B_1)) = R.$$
   Do đó, chúng ta cần thực hiện theo các bước sau:
   Bước 1: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (BCC_1B_1).
   Bước 2: Mặt cầu (S) thoả mãn điều kiện đầu bài suy ra:
   $$R = d(A, (BCC_1B_1)).$$
   Bước 3: Suy ra, phương trình mặt cầu S(A, R).
   c. Ta có ngay: $(P): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{AM} \text{ và } \overrightarrow{BC_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1}] \end{cases}$.
   d. Chúng ta thực hiện theo các bước sau:
   Bước 1: Lập phương trình tham số đường thẳng (A_1C_1).
   Bước 2: Xét hệ phương trình tạo bởi (P) và (A_1C_1) sẽ suy ra được toạ độ của N, từ đó nhận được độ dài MN.

Câu IV.

1. Nhận xét rằng:

$$\sin 2x.\cos x.dx = 2\cos^2 x.\sin x.dx = -2\cos^2 x.d(1+\cos x)$$

Do đó, tích phân I được tính bằng việc sử dụng ẩn phụ $t = 1 + \cos x$ (dùng ẩn phụ bằng MS).

2. Đây thuộc bài toán đếm phân theo 3 lớp (tỉnh I, tỉnh II, tỉnh III) chúng ta lần lượt lựa chọn cho mỗi tỉnh (không phân biệt thứ tự $\Leftrightarrow$ tổ hợp) và nhận được số cách bằng việc sử dụng quy tắc nhân.

Câu V. Bất đẳng thức này được phát triển từ một dạng rất cơ bản dạng:

"*Chứng minh rằng* $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, *với mọi* a, b, c "

và cách chứng minh đơn giải nhất là nhận xét:

$a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ca$, rồi thực hiện phép cộng theo vế chúng ta sẽ nhận được bất đẳng thức cần chứng minh.

Dễ thấy, dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI B NĂM 2005

Câu I.

1. *Bạn đọc tự làm.*

2. Miền xác định $D = \mathbf{R}\backslash\{-1\}$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2},\ y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{bmatrix}.$$

Vậy, với mọi m đồ thị (C_m) luôn luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu là

$A(-2, m-3)$ và $B(0, m+1)$,

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + (m+1-m+3)^2} = \sqrt{20}.$$

Câu II.

1. Điều kiện:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2 - y \geq 0 \\ 9x^2 > 0 \text{ và } y^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < y \leq 2 \end{cases}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ:

$$3(1 + \log_3 x) - 3\log_3 y = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 y \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2\sqrt{(x-1)(2-x)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = 2 \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1, 1) và (2, 2).

2. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\cos x + \sin x)^2 + \sin x + \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x + 1 + \cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, \text{ với } k \in \mathbf{Z}.$$

Câu III.

1. Giả sử đường tròn (C) với tâm I(a, b) bán kính R, khi đó:
   - Để (C) tiếp xúc với trục hoành tại A(2, 0) điều kiện là:
     $$a = 2 \text{ và } R = IA = |b|$$
   - Để IB = 5 điều kiện là:
     $$25 = IB^2 = (6 - a)^2 + (4 - b)^2 = (6 - 2)^2 + (4 - b)^2$$
     $$\Leftrightarrow b^2 - 8b + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ b = 1 \end{cases}.$$

   Khi đó:
   - Với b = 7, ta nhận được đường tròn (C_1) có:
     $$(C_1): \begin{cases} \text{tâm } I_1(2,7) \\ \text{bán kính } R_1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow (C_1): (x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 49$$
   - Với b = 1, ta nhận được đường tròn (C_2) có:
     $$(C_2): \begin{cases} \text{tâm } I_2(2,1) \\ \text{bán kính } R_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (C_2): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

2. Ta lần lượt thực hiện:

a. $A_1(0, -3, 4)$, $C_1(0, 3, 4)$.

b. Phương trình mặt phẳng (BCC_1B_1) được cho bởi:

$$(BCC_1B_1): \begin{cases} \text{qua } B \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{BC} \text{ và } \overrightarrow{BB_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (BCC_1B_1):\begin{cases}\text{qua } B(4,0,0)\\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}] = 4(3,4,0)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (BCC_1B_1): 3(x-4)+4y=0 \Leftrightarrow (BCC_1B_1): 3x+4y-12=0.$$

Mặt cầu (S) tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1) khi:

$$R = d(A,(BCC_1B_1)) = \frac{|4.(-3)-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{24}{5}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu S(A, R) có dạng:

$$(S): x^2+(y+3)^2+z^2 = \frac{576}{25}.$$

c. Ta có $M(2, -\frac{3}{2}, 4)$ và khi đó:

$$(P):\begin{cases}\text{Qua } A(0,-3,0)\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{AM} \text{ và } \overrightarrow{BC_1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P):\begin{cases}\text{qua } A(0,-3,0)\\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1}] = -4, \text{ chọn } \vec{n} = (1,4,-2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): x+4(y+3)-2z=0 \Leftrightarrow (P): x+4y-2z+12=0.$$

d. Phương trình tham số của đường thẳng (A_1C_1) được cho bởi:

$$(A_1C_1):\begin{cases}\text{qua } A_1(0,-3,4)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{A_1C_1}(0,6,0)\end{cases} \Leftrightarrow (A_1C_1):\begin{cases}x=0\\ y=-3+t, \text{ với } t\in \mathbf{R}.\\ z=4\end{cases}$$

Bằng cách thay phương trình tham số của (A_1C_1) vào phương trình của (P) ta được:

$$0+4(-3+t)-2.4+12=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow N(0,-1,4)$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{(0-2)^2+(-1+\frac{3}{2})^2+(4-4)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Câu IV.

1. Đặt $t = 1+\cos x$, suy ra: $\cos x = t-1 \Rightarrow -\sin x dx = dt$.

   Đổi cận:

   - Với $x = 0 \Rightarrow t = 2$.
   - Với $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Khi đó:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x.\sin x.dx}{1+\cos x} = -2\int_2^1 \frac{(t-1)^2 dt}{t} = 2\int_1^2 \left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} - 2t + \ln|t|\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

2. Ta lần lượt thực hiện việc chọn cho tỉnh I, tỉnh II, tỉnh III:

- Tỉnh I có $C_{12}^4.C_3^1$ cách chọn 4 nam và 1 nữ.
- Tỉnh II có $C_8^4.C_2^1$ cách chọn 4 nam và 1 nữ.
- Tỉnh III có $C_4^4.C_1^1$ cách chọn 4 nam và 1 nữ.

Vậy, tổng số cách phân công bằng: $C_{12}^4.C_3^1 . C_8^4.C_2^1 . C_4^4.C_1^1 = 207900$ cách.

Câu V. Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta lần lượt có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x.\left(\frac{15}{4}\right)^x} = 2.3^x. \quad (1)$$

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x.\left(\frac{20}{3}\right)^x} = 2.4^x. \quad (2)$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x.\left(\frac{20}{3}\right)^x} = 2.5^x. \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta được:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x, \text{ đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\left(\frac{12}{5}\right)^x = \left(\frac{15}{4}\right)^x = \left(\frac{20}{3}\right)^x \Leftrightarrow x = 0.$

ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI D NĂM 2005

Câu I: (2 điểm): Cho hàm số:

$$(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}, \text{ với m là tham số.}$$

1. (1 điểm): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 2

2. (1 điểm): Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng – 1. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

Câu II: (2 điểm):

1. (1 điểm): Giải phương trình:

$$2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} = 4.$$

2. (1 điểm): Giải phương trình:

$$\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0.$$

Câu III: (3 điểm):

1. (1 điểm): Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho điểm C(2, 0) và elíp (E): $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Tìm toạ độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và ΔABC là tam giác đều.

2. (2 điểm): Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$(d_1): \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases}.$$

   a. (1 điểm): Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

   b. (1 điểm): Mặt phẳng toạ độ Oxz cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại các điểm A, B. Tính diện tích ΔOAB, với O là gốc toạ độ.

Câu IV: (2 điểm):

1. (1 điểm): Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/2} (e^{\sin x} + \cos x)\cos x dx$.

2. (1 điểm): Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$

biết rằng, $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$ (n là số nguyên dương, A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử và C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Câu V: (1 điểm): Cho các số dương x, y, z thoả mãn xyz = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

ĐÁNH GIÁ VÀ ĐỊNH HƯỚNG THỰC HIỆN

Câu I.

1. Tham khảo định hướng trong câu I.1 của đề toán khối B – 2008.
2. Chúng ta sử dụng kết quả:

   "*Tiếp tuyến của đồ thị hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* $M(x_0, y_0)$ *có phương trình*:

   $$(d):\ y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0\ ".$$

Từ đó, bằng việc sử dụng điều kiện (d) song song với đường thẳng $5x - y = 0$ chúng ta sẽ nhận được giá trị của m $\Rightarrow$ phương trình của (d).

Câu II.

1. Khi bắt tay vào giải phương trình này, các em học sinh nghĩ ngay tới việc phải đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình và chính từ công việc này sẽ giúp các em định hướng được lời giải, cụ thể:

   $$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x+2+2\sqrt{x+1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x+1+2\sqrt{x+1}+1 \ge 0 \text{ luôn đúng} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -1.$$

   Như vậy, chúng ta nhận thấy việc biến đổi:

   $$2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} = 2\left|\sqrt{x+1}+1\right| = 2(\sqrt{x+1}-1)$$

   tức là, phương trình được chuyển về dạng:

   $$\sqrt{x+1} = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ x+1 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ x = a^2 - 1 \end{cases}.$$

   Và cũng chính vì vậy, khi trình bày lời giải bài toán trên chúng ta được quyền bỏ qua bước đặt điều kiện.

2. Trước tiên, chúng cần loại bỏ được các góc dạng $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ trong phương trình và cách làm dễ được lựa chọn là thực hiện phép chuyển đổi tích thành tổng, cụ thể:

   $$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] = \frac{1}{2}(-\cos 4x + \sin 2x)$$

   Còn đối với $\cos^4 x + \sin^4 x$ sử dụng phép hạ bậc toàn cục, ta có:

   $$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x.\sin^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Câu III.

1. Với $C \in Ox$ và $A, B \in (E)$ đối xứng qua Ox chúng ta có ngay được nhận xét ΔABC cân tại C. Do đó, để ΔABC đều điều kiện là AB = AC.

   Từ đó, để giải bài toán chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử $A(x_0, y_0)$ thì $B(x_0, -y_0)$ và thoả mãn $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$. (1)

Bước 2: Vì ΔABC cân tại C nên để ΔABC đều điều kiện là:

$$AB = AC \Leftrightarrow AB^2 = AC^2. \quad (2)$$

Bước 3: Giải hệ (1), (2) sẽ nhận được x_0, y_0, từ đó kết luận về toạ độ của A và B.

2. Chúng ta sử dụng các kết quả:

a. Để chứng minh (d_1) và (d_2) song song với nhau ta đi khẳng định:

- (d_1) và (d_2) có hai vtcp $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ cùng phương.
- Tồn tại điểm $M_1 \in (d_1)$ và $M_1 \notin (d_2)$.

Khi đó, mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) (biết $(d_1)//(d_2)$) sẽ có phương trình được xác định bằng một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng chùm mặt phẳng, ta có:

$$(P): \begin{cases} (d_2) \subset (P) \\ M_1 \in (P) \end{cases}.$$

Cách 2: Lấy điểm $M_2 \in (d_2)$, khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M_1 \\ \text{cặp vtcp } \vec{a}_1 \text{ và } \overrightarrow{M_1M_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } M_1 \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\vec{a}_1, \overrightarrow{M_1M_2}] \end{cases}.$$

b. Bằng cách xét sự tương giao của các đường thẳng (d_1), (d_2) với mặt phẳng (Oxz): $y = 0$ chúng ta sẽ nhận được toạ độ của A và B.

Khi đó, diện tích ΔOAB, với O là gốc toạ độ được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \right|.$$

Câu IV.

1. Trong trạng thái thụ động, các em học sinh thường tìm cách đổi biến số hoặc tích phân từng phần để áp dụng cho tích phân này, mà quên mất rằng ngay khi bắt đầu làm quen với kiến thức về tích phân chúng ta đã có tính chất:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Do đó:

$$I = \int_0^{\pi/2} (e^{\sin x} + \cos x)\cos x dx = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x.dx + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx,$$

trong đó:

- Tích phân thứ nhất được tính bằng việc viết lại $\cos x.dx = d(\sin x)$.
- Tích phân thứ hai được tính bằng việc hạ bậc cho $\cos^2 x$.

2. Chúng ta thấy ngay rằng cần hai bước để thực hiện bài toán này, đó là:

Bước 1: Tìm được n từ đẳng thức $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$.

Bước 2: Thay n tìm được từ bước 1 vào biểu thức của M.

Câu V. Bất đẳng thức được cho dưới dạng đối xứng, do đó để khử được x, y, z dựa trên điều kiện xyz = 1 chúng ta chỉ cần áp dụng hai lần bất đẳng thức Côsi là xong.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2005

Câu I.

1. *Bạn đọc tự làm.*
2. Ta có:

$$y' = x^2 - mx.$$

Từ giả thiết, suy ra $M(-1, -\frac{m}{2})$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M có phương trình:

$$(d): y = y'_{(-1)}(x + 1) - \frac{m}{2} \Leftrightarrow (d): (1 + m)x - y + 1 + \frac{m}{2} = 0.$$

Để (d) song song với đường thẳng $5x - y = 0$ điều kiện là:

$$\begin{cases} 1 + m = 5 \\ 1 + \dfrac{m}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy, m = 4 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu II.

1. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$2\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} - \sqrt{x+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2|\sqrt{x+1}+1| - \sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow 2(\sqrt{x+1}+1) - \sqrt{x+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 3.

2. Biến đổi phương trình về dạng:

$$[(\cos^2x + \sin^2x)^2 - 2\cos^2x.\sin^2x] + \frac{1}{2}\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}(-\cos 4x + \sin 2x) - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sin^2 2x - (1 - 2\sin^2 2x) + \sin 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -2 \text{ loại} \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Câu III.

1. Giả sử $A(x_0, y_0)$ thì $B(x_0, -y_0)$ và thoả mãn:

$$\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}. \qquad (1)$$

Vì ΔABC cân tại C nên để ΔABC đều điều kiện là:

$$AB = AC \Leftrightarrow AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow 4y_0^2 = (2 - x_0)^2 + y_0^2$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (2 - x_0)^2 - 3\left(1 - \frac{x_0^2}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 7x_0^2 - 16x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 = 2 \\ x_0 = \frac{2}{7} \end{bmatrix}.$$

- Với $x_0 = 2 \overset{(1)}{\Rightarrow} y_0 = 0$ loại do khi đó $A \equiv B \equiv C$.
- Với $x_0 = \frac{2}{7} \overset{(1)}{\Rightarrow} y_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{7}$, như vậy ta được:

$$A\left(\frac{2}{7}, \frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ và } B\left(\frac{2}{7}, -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ hoặc } A\left(\frac{2}{7}, -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ và } B\left(\frac{2}{7}, \frac{4\sqrt{3}}{7}\right).$$

2. Ta lần lượt thực hiện:

a. Ta có:

- (d_1) có vtcp $\vec{a}_1(3, -1, 2)$ và đi qua điểm $M_1(1, -2, -1)$.
- (d_2) có vtcp $\vec{a}_2(3, -1, 2)$ và đi qua điểm $M_2(0, 4, 2)$.

Nhận xét rằng $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$ và điểm $M_1 \notin (d_2)$ bởi:

$$\begin{cases} 1 + (-2) - (-1) - 2 = 0 \\ 1 + 3(-2) - 12 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Để lập phương trình mặt phẳng (P) chúng ta có hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng chùm mặt phẳng*): Mặt phẳng (P) chứa (d_2) nên có dạng:

$$(P): A(x + y - z - 2) + B(x + 3y - 12) = 0. \quad (1)$$

Để (P) chứa (d_1) điều kiện là:

$$M_1 \in (P) \Leftrightarrow A(1 - 2 + 1 - 2) + B(1 - 6 - 12) = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{17}{2}B. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$(P): 15x + 11y - 17z - 10 = 0.$$

Cách 2: Ta có ngay:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \\ \text{Cặp vtcp } \vec{a}_1 \text{ và } \overrightarrow{M_1M_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } M_1(1, -2, -1) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\vec{a}_1, \overrightarrow{M_1M_2}] = (15, 11, -17) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): 15(x - 1) + 11(y + 2) - 17(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): 15x + 11y - 17z - 10 = 0.$$

b. Ta lần lượt có:

- Toạ độ của A là nghiệm của hệ tạo bởi (d_1) và (Oxz) nên:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \\ z = -5 \end{cases} \Rightarrow A(-5, 0, -5).$$

- Toạ độ của B là nghiệm của hệ tạo bởi (d_2) và (Oxz) nên:

$$\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \\ z = 10 \end{cases} \Rightarrow B(12, 0, 10).$$

Khi đó, diện tích ΔOAB, với O là gốc toạ độ được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]\right| = \frac{1}{2}\left|[(-5, 0, -5), (12, 0, 10)]\right| = 5 \text{ đvdt}.$$

Câu IV.

1. Viết lại tích phân dưới dạng:

$$I = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x.dx + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} d(\sin x) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos 2x + 1)dx$$

$$= e^{\sin x}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right)\Big|_0^{\pi/2} = e - 1 + \frac{\pi}{4}.$$

2. Ta biến đổi:

$$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!.(n-1)!} + \frac{2(n+2)!}{2!.n!} + \frac{2(n+3)!}{2!.(n+1)!} + \frac{(n+4)!}{2!.(n+2)!} = 149$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 45 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = -9 \text{ loại} \end{array}\right.$$

Khi đó, với $n = 5$ ta được:

$$M = \frac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \frac{3}{4}.$$

Câu V. Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}$$

$$\geq \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{x^3y^3}}}{xy} + \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{y^3z^3}}}{yz} + \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{z^3x^3}}}{zx} = \sqrt{\frac{3}{xy}} + \sqrt{\frac{3}{yz}} + \sqrt{\frac{3}{zx}}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{3}{xy}}.\sqrt{\frac{3}{yz}}.\sqrt{\frac{3}{zx}}} = 3\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$1 = x^3 = y^3 = z^3 \text{ và } \sqrt{\frac{3}{xy}} = \sqrt{\frac{3}{yz}} = \sqrt{\frac{3}{zx}} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU 3

CẤU TRÚC CỦA MỘT ĐỀ THI TUYỂN SINH 4

ĐỀ THI TOÁN KHỐI A – 2009 9

Đánh giá và định hướng thực hiện 10

Đáp án chi tiết 20

ĐỀ THI TOÁN KHỐI B – 2009 27

Đánh giá và định hướng thực hiện 29

Đáp án chi tiết 37

ĐỀ THI TOÁN KHỐI D – 2009 44

Đánh giá và định hướng thực hiện 45

Đáp án chi tiết 50

ĐỀ THI TOÁN KHỐI A – 2008 57

Đánh giá và định hướng thực hiện 59

Đáp án chi tiết 68

ĐỀ THI TOÁN KHỐI B – 2008 75

Đánh giá và định hướng thực hiện 76

Đáp án chi tiết 88

ĐỀ THI TOÁN KHỐI D – 2008 95

Đánh giá và định hướng thực hiện 96

Đáp án chi tiết 100

ĐỀ THI TOÁN KHỐI A – 2007 105

Đánh giá và định hướng thực hiện 106

Đáp án chi tiết 110

ĐỀ THI TOÁN KHỐI B – 2007 118

Đánh giá và định hướng thực hiện 119

Đáp án chi tiết 122

ĐỀ THI TOÁN KHỐI D – 2007 ..... **127**
Đánh giá và định hướng thực hiện 128
Đáp án chi tiết 132
ĐỀ THI TOÁN KHỐI A – 2006 ..... **138**
Đánh giá và định hướng thực hiện 139
Đáp án chi tiết 142
ĐỀ THI TOÁN KHỐI B – 2006 ..... **180**
Đánh giá và định hướng thực hiện 181
Đáp án chi tiết 184
ĐỀ THI TOÁN KHỐI D – 2006 ..... **237**
Đánh giá và định hướng thực hiện 238
Đáp án chi tiết 241
ĐỀ THI TOÁN KHỐI A – 2005 ..... **286**
Đánh giá và định hướng thực hiện 287
Đáp án chi tiết 289
ĐỀ THI TOÁN KHỐI B – 2005 ..... **294**
Đánh giá và định hướng thực hiện 295
Đáp án chi tiết 297
ĐỀ THI TOÁN KHỐI D – 2005 ..... **300**
Đánh giá và định hướng thực hiện 302
Đáp án chi tiết 304

SÁCH PHÁT HÀNH TẠI

TP. HỒ CHÍ MINH:

NS HỒNG ÂN - 18D Nguyễn Thị Minh Khai – Quận I

ĐÀ NẴNG:

CÔNG TY CP SÁCH - TBTH – 78 Bạch Đằng

THANH HÓA:

NS VĂN HÓA – 27 – 29 Đại lộ Lê Lợi

NGHỆ AN:

NS VĂN HÓA – 343 Lê Duẩn – TP. Vinh

QUẢNG BÌNH:

CÔNG TY SÁCH TBTH – 03 Mẹ Suốt và 257 Trần Hưng Đạo

QUẢNG TRỊ:

CỬA HÀNG SÁCH GIÁO DỤC – 283 Trần Hưng Đạo

HUẾ:

NS HỒNG ĐỨC – 59 Trần Phú

QUẢNG NAM:

CÔNG TY SÁCH TBTH – 190 Phan Chu Trinh

NS SIÊU THỊ VĂN HÓA ĐIỆN ẢNH TAM KỲ – 24 Trần Cao Vân

QUẢNG NGÃI:

NS VĂN HÓA – 204 Nguyễn Nghiêm

NS TRẦN QUỐC TUẤN – 526 Quang Trung

BÌNH ĐỊNH:

NS VĂN HÓA – 120 Lê Lợi – Quy Nhơn

PHÚ YÊN:

NS VĂN HÓA – Ô phố B8 khu dân dụng DUY TÂN – Tuy Hòa

KHÁNH HÒA:

CÔNG TY CP PHS – 34 – 36 Thống Nhất – Nha Trang

SIÊU THỊ TÂN TIẾN – 11 Lê Thành Phương

BÌNH THUẬN:

NS HƯNG ĐẠO – 328 Trần Hưng Đạo – TP. Phan Thiết

ĐỒNG NAI:

NS KIM NGÂN – 88 Cách Mạng Tháng Tám – TP. Biên Hòa

VŨNG TÀU:

NS ĐÔNG HẢI – 38 Lý Thường Kiệt

NS ABC – 204 Bình Giã

GIA LAI:

NS NHÂN DÂN – 06 Lê Lợi – Pleiku

CÔNG TY SÁCH TBTH – 40B Hùng Vương

DAKLAK:

NS GIÁO DỤC – 19 Trường Chinh

NS LÝ THƯỜNG KIỆT – 55 – 57 Lý Thường Kiệt

CÔNG TY CP VĂN HÓA DAKLAK – 01 Hai Bà Trưng

KONTUM:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH - 129 Phan Đình Phùng

LÂM ĐỒNG:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 09 Nguyễn Văn Cừ – Đà Lạt

CÔNG TY CP IN VÀ PHS – 18 Khu Hòa Bình – Đà Lạt

DAK NÔNG:

CÔNG TY SÁCH TBTH – 151 Hai Bà Trưng

NS GIÁO DỤC – 30 Trần Hưng Đạo – Gia Nghĩa

ĐỒNG NAI:

NS KIM NGÂN – 88 Cách mạng tháng Tám – Biên Hòa

TÂY NINH:

NS VĂN NGHỆ – 295 Đường 30 tháng 4

LONG AN:

CÔNG TY PHS – 04 Võ Văn Tần – TX. Tân An

TIỀN GIANG:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 22 Hùng Vương – TP. Mỹ Tho

VĨNH LONG:

HS MƯỜI – 15 Lê Thái Tổ

CẦN THƠ:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 132 Đường 30 tháng 4

HẬU GIANG:

CÔNG TY SÁCH TBTH – 50 Nguyễn Thái Học – TX Vị Thanh

ĐỒNG THÁP:

NS VIỆT HƯNG – 200 Nguyễn Huệ – TP. Cao Lãnh

BẾN TRE:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 03 Đồng Khởi

SÓC TRĂNG:

NS TRẺ – 41 Trần Hưng Đạo

AN GIANG:

TT VĂN HÓA TỔNG HỢP – 15 – 17 Hai Bà Trưng

BẠC LIÊU:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 59 Lý Thường Kiệt – Phường 3

TRUNG TÂM PHS – 57 Hoàng Văn Thụ

KIÊN GIANG:

NS ĐÔNG HỒ I – 98B Trần Phú – Rạch Giá

NS ĐÔNG HỒ II – 989 Nguyễn Trung Trực – Rạch Giá

CÀ MAU:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 26 – 28 Lê Lợi – Phường 2

TRÀ VINH:

NS LIÊN SƯƠNG – 127 Trần Quốc Tuấn

SÁCH CÓ BÁN LẺ TẠI CÁC CỬA HÀNG SÁCH TRÊN TOÀN QUỐC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;

Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897

Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: BÍCH HẠNH

Đối tác liên kết xuất bản:

NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI ĐỀ THI ĐẠI HỌC MÔN TOÁN

Mã số: 1L – 115ĐH2010

In 2000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân

Số xuất bản: 238 – 2010/CXB/14 – 45/ĐHQGHN, ngày 12/3/2010.

Quyết định xuất bản số: 115LK-TN/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.